

OZIEL HENRIQUE DA SILVA LEITE

SOBRE UM PROCESSO DE AUTOMATIZAÇÃO NO CÁLCULO DA CORREÇÃO DO TERRENO

Dissertação apresentada ao Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
para obtenção do Grau de Mestre
em Ciências pela Universidade Federal do
Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1979

SOBRE UM PROCESSO DE AUTOMATIZAÇÃO NO CÁLCULO DA CORREÇÃO DO TERRENO

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para
obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do
Paraná

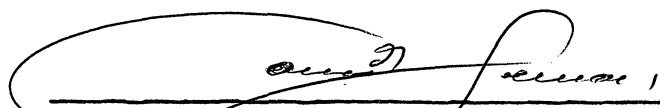
por

OZIEL HENRIQUE DA SILVA LEITE, Licenciado em Física

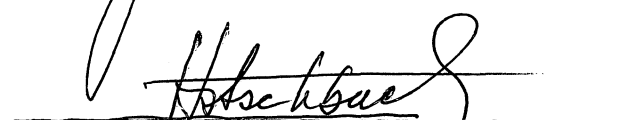
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1979

BANCA EXAMINADORA:


Dr. CAMIL GEMAEI - ORIENTADOR


Ph.D. JOSE BITTENCOURT DE ANDRADE


M.Sc. FERNANDO HATSCHBACH

AGRADECIMENTOS

O autor, profundamente, deseja manifestar seus agradecimentos :

ao Professor Dr. Camil Gemael pela orientação e incentivo dedicados na elaboração deste trabalho;

ao Professor Dr. José Bittencourt de Andrade pelas sugestões e interesse apresentados;

ã Srta. Ediclêa Walter pelo auxílio prestado na datilografia; e

aos amigos e colegas que de alguma forma contribuíram para o êxito desta pesquisa.

SINOPSE

O objetivo deste trabalho é desenvolver um processo de automação, fazendo uso de computadores eletrônicos, no cálculo das altitudes médias dos compartimentos das zonas de Hayford, que nos permite obter as reduções de Bouguer e isostática nas reduções gravimétricas.

A dificuldade até então encontrada residia na obtenção das altitudes médias que se fazia por um processo manual, moroso e de certa forma subjetivo.

Investigações foram efetuadas no sentido de se encontrar uma equação matemática representativa de uma região da superfície terrestre.

Baseando-se em uma família de quádricas, superfícies de segunda ordem, e através de informações da altimetria, como cumes de morro ou montanhas, depressões, canais de drenagem etc, HARDY [02] determinou uma equação que representa a topografia de uma região terrestre.

Foram feitas análises quanto ao número de pontos fundamentais, pontos que definem a altimetria, necessários à determinação da equação da topografia, chegando-se à conclusão que é um fator dependente da área em estudo, da habilidade do usuário, do método e do grau de precisão das altitudes desejadas.

Como o interesse reside no cálculo de altitudes médias, o método mostrou-se consistente e aceitável para o cálculo das correções do terreno.

SYNOPSIS

It is very well known that for gravimetric reductions the average heights of the Hayford's zones compartments are needed.

Up to now the attainment of average heights has been made by a manual process which is lengthy and sometimes subjective.

The aim of this paper is to develop a process of automation using electronic computers to obtain average heights.

Investigations were made in order to find a mathematical equation representing a terrestrial surface. By using quadric's family, and information given by altimetry, like hilltops, saddles, depressions, drainage junctions, etc., an equation was established which represents the topographic equation. The conclusion was that it depends on the shape of the area of study, the user's skill, and the desired degree of accuracy in elevation.

Because the interest lies only in the average heights the method proved to be reliable and acceptable for terrain correction computations.

SUMÁRIO

	Página
Título	ii
Agradecimentos	iii
Sinopse	iv
Synopsis	v
Sumário	vi
Introdução	01

CAPÍTULO I

	MEDIDAS GRAVIMÉTRICAS	03
1.	Considerações	03
2.	Lei da gravitação universal	04
3.	Campo gravitacional	05
4.	Potencial gravitacional	06
5.	Anomalias da gravidade	09
6.	Reduções gravimétricas	10
6.1.	Redução do ar-livre (free-air reduction)	11
6.2.	Redução de BOUGUER	13
6.3.	Reduções isostáticas	21
6.3.1.	Redução de PRATT-HAYFORD	22
6.3.2.	Redução de AIRY-HEISKANEN	25

CAPÍTULO II

	SUPERFÍCIES DE SEGUNDA ORDEM	30
1.	Quádricas	30
2.	Equações reduzidas das quádricas	31
3.	Quádricas centradas	31

CAPÍTULO III

	ALTITUDES TOPOGRÁFICAS OBTIDAS ATRAVÉS DAS MULTIQUÁDRICAS APLICADAS NA CORREÇÃO DO TERRENO	44
1.	Introdução	44
2.	Superfícies multiquádricas	46
3.	Equação da topografia	47
4.	Simulação de uma superfície topográfica	50
5.	Altitudes médias	58
5.1.	Obtenção das altitudes médias	58
5.2.	Processo prático de obtenção das altitudes médias	60
6.	Cálculo da correção do terreno	62

CAPÍTULO IV

	CONCLUSÕES	64
	Referências bibliográficas	66
	Apêndice	67
	Programa 1	68
	Programa 2	69

INTRODUÇÃO

Dentre as reduções gravimétricas, a redução de Bouguer no tocante à correção do terreno (Geländerreduktion), a redução isostática e a topo-isostática são as que apresentam o maior labor e morosidade em suas obtenções.

O maior problema reside na obtenção das altitudes médias dos compartimentos das zonas literais ou numeradas de Hayford, uma vez que de posse das mesmas, tabelas ou fórmulas nos fornecem as referidas reduções.

Em regiões não montanhosas, como é o caso do Brasil, a correção do terreno é geralmente negligenciada. Entretanto, tal fato não pode ser admitido posto que atualmente existem gravímetros como o LaCoste & Romberg que nos fornecem leituras do décimo de miligal. Levantamentos efetuados na região de Curitiba, altitude média de 900m, mostraram uma correção da ordem de 0,4mgal [01] o que significa que a Geländerreduktion deve ser considerada.

A falta de cartas topográficas e, talvez, devido à morosidade e ao estafante trabalho manual na obtenção das altitudes médias dos compartimentos das zonas de Hayford, a correção do terreno tenha sido desprezada. Em face disso, estudamos aqui um processo que automatiza a obtenção destas altitudes, fazendo uso de computadores eletrônicos.

Uma das maneiras de atingir o objetivo proposto é o de adotar uma equação que defina a superfície topográfica da região que se deseja estudar. Sendo a superfície terrestre muito irregular, a sua representação através de uma equação será apenas uma

aproximação da mesma.

A partir do estudo das superfícies de segunda ordem, as quádricas, HARDY [02] obteve um modelo de superfície representativa da topografia de uma região.

Das famílias de quádricas, aquela investigada por HARDY foi o hiperbolóide de duas folhas, onde fez o termo independente ser nulo, o que fornece a equação de uma família de cones circulares retos. Baseados nesta equação, definimos a equação multiquádrica que representa a superfície topográfica.

Para se obter a equação da topografia necessitamos, obviamente, de informações sobre a altimetria da área a ser representada pela mesma. Essas informações seriam dadas por alguns pontos significativos dessa área a fim de permitir a geração dos coeficientes da equação. A escolha desses pontos é fundamental na obtenção da equação da topografia.

Uma vez definidos os parâmetros do modelo matemático da superfície, podemos, através dele, obter as altitudes médias dos compartimentos de Hayford.

CAPÍTULO I

MEDIDAS GRAVIMÉTRICAS

1. CONSIDERAÇÕES

Uma das aplicações do modelo matemático da superfície topográfica adotado consiste em calcular a correção do terreno nas reduções gravimétricas.

O objetivo deste trabalho é utilizar tal modelo [02] na correção acima citada, lembrando, porém, que podemos aplicá-lo em outros propósitos.

Veremos, neste capítulo, um resumo das reduções gravimétricas que nos servirá de apoio teórico.

Quando enfocamos o problema das reduções gravimétricas devemos nos reportar à Geodésia Física que tem como objetivos principais a determinação das componentes do desvio da vertical (ξ, η) e das ondulações do geóide. Em ambos os casos necessitamos conhecer a anomalia da gravidade.

A anomalia da gravidade é definida como sendo $\Delta g = g_g - \gamma$, isto é, a diferença entre o valor de g reduzido ao geóide e o valor de γ calculado sobre o elipsóide de revolução tomado como referência. Enquanto γ (valor da gravidade na superfície do elipsóide de referência) é um valor que pode ser obtido através do cálculo, g é um valor que deve ser medido sobre a superfície real da Terra e reduzido ao geóide.

Desenvolveremos aqui, resumidamente, alguns tópicos da Teoria do Potencial para que possamos ter uma visão mais global dos conceitos envolvidos na anomalia da gravidade.

2. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

A Lei da Gravitação Universal de NEWTON estabelece que "cada partícula no universo atrai outra com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas; a direção da força situa-se na reta que une as duas partículas" [05].

Como podemos observar a lei de NEWTON foi estabelecida em termos de partículas (massa puntiforme ou ponto material) quando na realidade temos que tratar, não com partículas, mas com corpos materiais, ou seja, com uma distribuição contínua de matéria. Assim, devemos ampliar o estabelecido na lei de NEWTON da seguinte maneira:

"Sejam dados dois corpos, dividamo-los em partes elementares, a maneira do cálculo integral, e, ainda, seja a massa de cada elemento observada como concentrada em seu centro de gravidade. Então a atração que cada corpo exerce sobre outro é o limite da atração que o sistema de partículas correspondente exerce sobre o segundo sistema de partículas quando a distância entre os elementos tenda a zero" [05].

Consideremos um corpo material e uma partícula de massas M e m respectivamente, afastados entre si de uma certa distância. Se o corpo de massa M for dividido em elementos de massas dm , cada elemento será atraído em direção a m por uma força dF . Assim, a força total do sistema será:

$$F = \int_V dF \quad (2.1)$$

A integral estende-se sobre todo o corpo de volume V. Podemos, ainda, escrever:

$$F = -\frac{GmM}{R^2}$$

onde G é a constante universal da gravitação e R a distância que separa m e o centro de gravidade de M.

3. CAMPO GRAVITACIONAL

Seja um sistema de eixos cartesianos tri-ortogonais. As componentes da força gravitacional \vec{F} , segundo as direções x, y e z que atuam sobre uma partícula de massa unitária em um ponto P (x,y,z) devido a uma distribuição contínua de massa, são dadas por [06]:

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_V \frac{G(x-x')}{r^3} \rho dv \\ F_y &= - \int_V \frac{G(y-y')}{r^3} \rho dv \\ F_z &= - \int_V \frac{G(z-z')}{r^3} \rho dv. \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

x', y' e z' são as coordenadas do elemento de massa.

$$dv = dx' dy' dz'; \text{ e}$$

ρ = a densidade do corpo no ponto (x', y', z') .

4. POTENCIAL GRAVITACIONAL

Definimos potencial gravitacional a função escalar

$$V = G \int_M \frac{dm}{r} = G \int_V \frac{\rho}{r} dv \quad (4.1)$$

onde r é a distância entre o elemento de massa $dm = \rho dx' dy' dz'$ e um ponto material de massa unitária de coordenadas x, y, z e G a constante universal de atração que só depende do sistema de unidade empregado.

A função V assim definida depende das coordenadas (x, y, z) (não de x', y', z'), isto é, V é uma função do ponto atraído.

A diferença de potencial gravitacional entre duas posições nos fornece o trabalho realizado quando transportarmos uma partícula de uma posição para a outra.

$$\Delta V = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1)$$

Tal fato nos mostra o significado físico da função potencial.

Derivando parcialmente $V = V(x, y, z)$ em relação a x, y e z , vem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \int_M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dm = -G \int_M \frac{x - x'}{r^3} dm = -G \int_V \frac{(x - x')}{r^3} \rho dv$$

Da mesma maneira:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -G \int_V \frac{(y - y')}{r^3} \rho dv \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -Gm \int_V \frac{(z - z')}{r^3} \rho dv$$

Comparando as equações (4.2) com as (3.1), temos:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_z \quad (4.3)$$

Lembrando-se que:

$$\text{grad } A = \vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k} \quad (4.4)$$

vemos que

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (4.5)$$

ou seja

$$\text{grad } V = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (4.6)$$

$$\text{grad } V = \vec{F}$$

isto é, as derivadas parciais segundo os eixos coordenados representam as componentes do vetor \vec{F} (força de atração) segundo os mesmos eixos.

A gravidade da Terra consiste de duas partes, uma devida à lei da gravitação universal (principal) e a outra devida à força centrífuga de rotação da Terra. Desta maneira o potencial da gravidade ou geopotencial W será a soma do potencial gravitacional V e do potencial centrífugo Q :

$$W = V + Q \quad (4.7)$$

O gradiente de W nos fornece o vetor gravidade \bar{g}

$$\bar{g} = \text{grad } W \quad (4.8)$$

Convém destacar que geopotencial é o potencial verdadeiro decorrente das massas terrestres e da rotação do planeta.

As superfícies $W(x,y,z) = \text{const}$ nas quais o geopotencial W é constante, são chamadas de superfícies equipotenciais ou superfícies de nível e a gravidade \bar{g} é perpendicular a estas superfícies.

A superfície equipotencial que coincide com o nível médio dos mares é chamada de geóide (W_0). Tal superfície é fundamental para os propósitos da Geodésia Física.

Definamos, agora, o conceito da gravidade normal.

Seja um elipsóide de revolução ao qual se atribui a mesma massa e a mesma velocidade de rotação da Terra real e que possua um potencial $U = \text{const}$ em sua superfície. A este elipsóide damos o nome de Terra normal [01].

Para que possamos diferenciar o potencial da Terra real do da Terra normal, definimos esferopotencial U como sendo o potencial de atração (Z) mais o potencial centrífugo da Terra normal (Q), $U = Z + Q$.

Desta maneira o vetor da gravidade normal fica definida como

$$\bar{\gamma} = \text{grad } U_0$$

onde U_0 é o esferopotencial na superfície da Terra normal.

Esferopes são superfícies equipotenciais do campo da gravidade normal.

5. ANOMALIA DA GRAVIDADE

Tomemos um ponto P sobre o geóide (W_0) e sua projeção P' sobre o esferope (U_0) e consideremos os respectivos vetores da gravidade \vec{g}_P e $\vec{\gamma}_{P'}$; definimos como vetor anomalia da gravidade ao vetor

$$\Delta \vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_{P'}$$

E de anomalia da gravidade o escalar

$$\Delta g = g_P - \gamma_{P'} \quad (5.1)$$

ou seja, anomalia da gravidade \bar{e} a diferença entre as intensidades dos vetores da gravidade real em P e da gravidade normal em P' , conforme mostra a fig. 1.

O ângulo(i) formado entre as normais ao geóide (vertical) e ao esferope U_0 (normal) \bar{e} chamado de desvio da vertical. E a separação(N) entre as duas superfícies, ao longo da normal, e denominada de ondulação ou altitude geoidal.

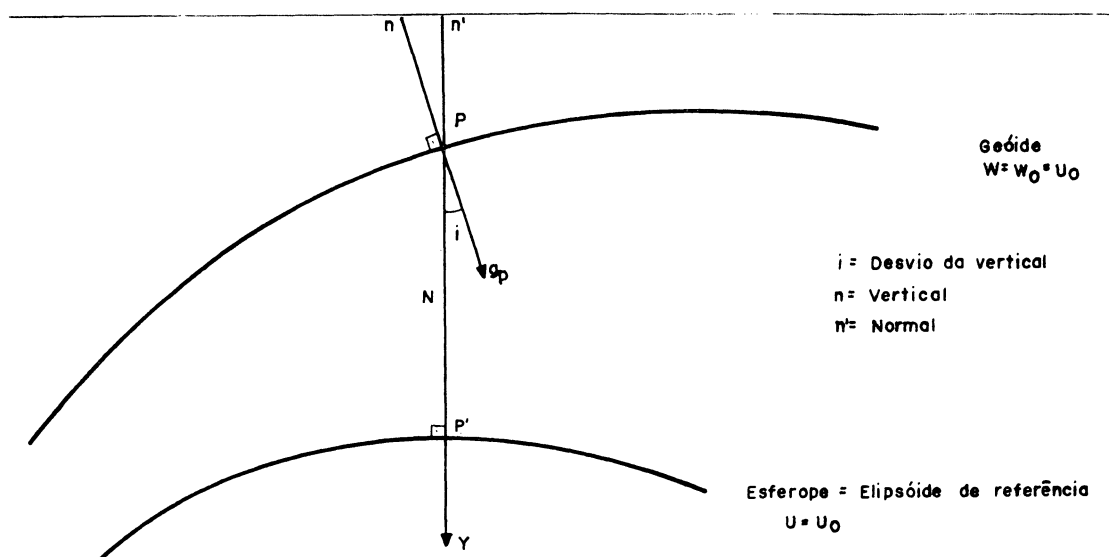


Fig. 1 — *Geóide e o elipsóide de referência*

6. REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS

A altitude geoidal varia aproximadamente entre os valores -50 a +50m, o que nos permite comparar os valores da gravidade tomados sobre o geóide e o elipsóide.

A separação entre a superfície física da Terra (superfície topográfica) e a superfície do geóide atinge valores de até 8000m, impossibilitando-nos estabelecer comparação entre os valores da gravidade sobre as mesmas. Por esta razão devemos efetuar a redução, do valor da gravidade g medido sobre a superfície física da Terra, ao geóide, o que permite ao geodesta utilizar a anomalia da gravidade como ferramenta de trabalho. As massas topográficas existentes acima do nível médio dos mares nos conduzem a diferentes métodos de redução que dependem de como essas massas são tratadas.

As reduções gravimétricas nos auxiliam em dois propósitos principais [03]:

- a) determinação do geóide;
- b) investigação da crosta terrestre.

Essas reduções são de interesse para os geodestas, geólogos e geofísicos dependendo do propósito de cada um. A primeira é de natureza geodésica e a segunda interessa à Geofísica e à Geologia, que estudam a estrutura da crosta terrestre e a localização de depósitos minerais.

Dependendo da precisão e da maneira pela qual consideramos o efeito da atração das massas topográficas e outros pequenos efeitos, temos as seguintes reduções:

- I) reduções não-isostáticas:
 - a) redução do ar-livre (free-air reductions);
 - b) redução de Bouguer;
 - c) redução de Rudski;
 - d) redução de Helmert.

II) reduções isostáticas:

- a) redução de Pratt-Hayford;
- b) redução de Airy-Heiskanen;
- c) redução de Vening-Meinesz;
- d) efeito indireto ou correção de Bowie.

6.1. Redução do ar-livre (free-air reduction)

Vimos que a anomalia da gravidade foi definida como sendo:

$$\Delta g = g_0 - \gamma$$

onde g_0 é o valor observado e reduzido ao geóide.

A redução do ar-livre recebe este nome porque a mesma somente leva em consideração a altitude da estação sem se preocupar com as massas existentes entre a estação e o geóide. Bastando para isto conhecermos o gradiente vertical da gravidade (dg/dn) e multiplicá-lo pela altitude da estação. Veja fig. 2.

Quanto maior a altitude de um ponto tanto menor o valor da gravidade neste ponto devido ao fato de haver um afastamento das massas atraentes e um aumento na força centrífuga que é contrária à direção de g , apesar desta última ser pequena comparada com a primeira.

Consideremos a Terra esférica e desprezando o efeito da força centrífuga, temos:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

sendo M e R a massa e o raio da Terra.

A gravidade g no ponto P , de altitude h , é igual

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R} + 3 \frac{h^2}{R^2} - \dots \right) \quad (6.1.1)$$

ou

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R} + 3 \frac{h^2}{R^2} - \dots \right)$$

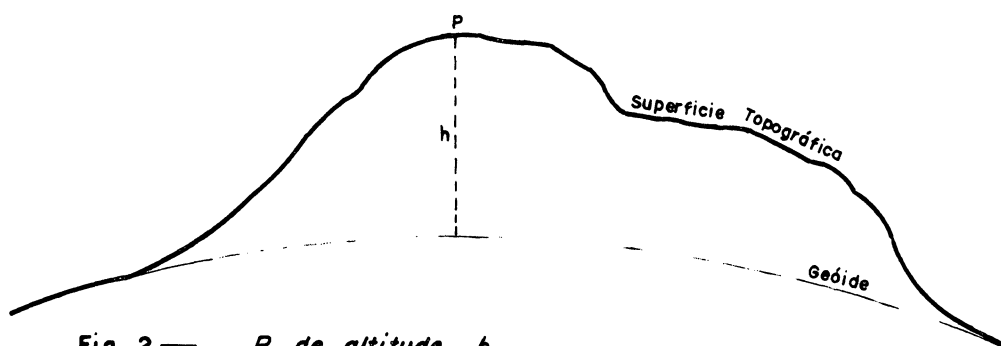


Fig. 2 — P de altitude h .

Desta maneira, a correção do ar-livre será:

$$C_f = g_0 - g = 2 \frac{g_0}{R} h \left(1 - \frac{3h}{2R} + \dots \right) \quad (6.1.2)$$

O segundo termo da (6.1.2) pode ser negligenciado, exceto para altitudes acima de 2000m.

Em regiões não montanhosas podemos seguramente usar a (6.1.2) substituída pelos valores numéricos e acrescida do efeito da força centrífuga, como segue:

$$C_f = + 0,3086 \text{ h mgal} \quad (6.1.3)$$

sendo h medido em metros.

A correção do ar-livre é também frequentemente chamada "correção de FAYE".

6.2. Redução de BOUGUER

A legitimidade da fórmula de STOKES exige a inexistência de massas externas ao geóide.

O objetivo da correção de BOUGUER é exatamente remover o efeito atrativo dessas massas, isto é, remover matematicamente as massas existentes entre a superfície terrestre e o geóide.

Um ponto material da superfície física da Terra fica sujeito à atração das massas interiores ao geóide e das massas externas ao mesmo (massas topográficas). A remoção das massas topográficas implica na subtração desta correção do valor observado de g .

Admitamos que a região ao redor da estação gravimétrica P seja completamente plana e horizontal, como mostra a fig.3, e que as massas situadas entre o geóide e a superfície terrestre tenham densidade (ρ) constante. Entendemos a região ao redor da estação como sendo um platô horizontal de espessura h cujo pólo é a estação. A componente vertical da atração exercida por este platô aproxima-se sensivelmente da que seria produzida por uma "calota" esférica com raio $R = 166,7\text{km}$.

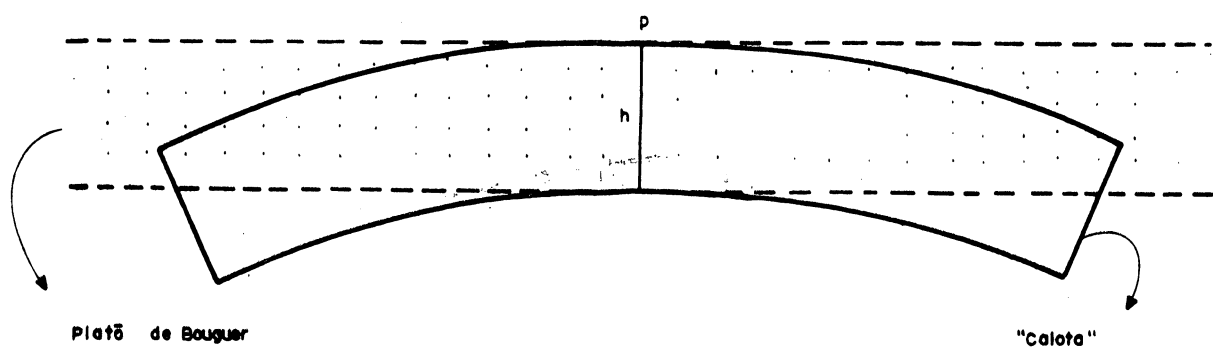


Fig. 3 — *Platô de Bouguer e "Calota" esférica*

Consideremos um plano horizontal que passa pela estação P , mostrado na fig. 4, tal que exista um platô entre o ponto P de massa unitária e o geóide. A atração dA da massa elementar dm sobre o ponto material P pode ser obtida facilmente através das coordenadas cilíndricas:

$$df = G \frac{dm}{d^2} \quad (6.2.1)$$

onde d é a distância de dm até P .

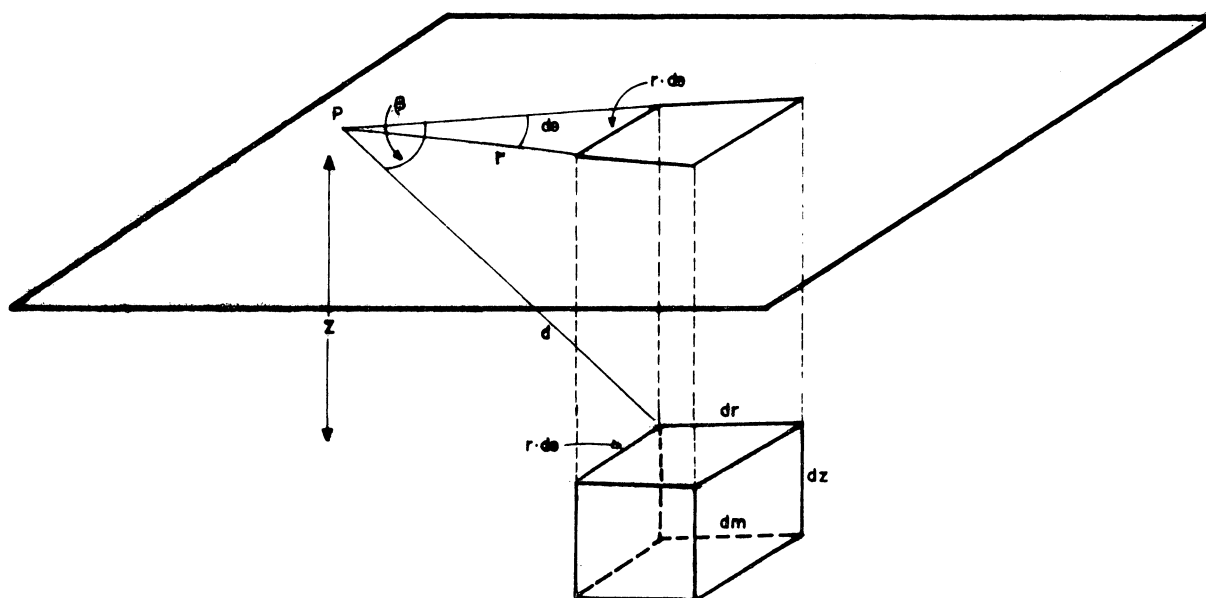


Fig. 4 — *Redução de Bouguer*

O elemento de massa será:

$$dm = \rho r dr d\theta dz$$

onde ρ é a densidade.

Portanto, a (6.2.1) torna-se

$$df = G\rho \frac{r dr d\theta dz}{d^2} \quad (6.2.2)$$

A componente vertical desta atração é:

$$dA = df \sin\beta = G\rho \frac{d\theta z dz r dr}{d^3} \quad (6.2.3)$$

ou

$$dA = G\rho \frac{d\theta z dz r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.2.4)$$

visto que $d^2 = r^2 + z^2$.

Ao tomarmos um compartimento prismático de altura h e seção transversal definida por dois arcos de circunferências concêntricas de raios r_1 e r_2 e duas retas convergentes em P de azimute θ_1 e θ_2 a (6.2.4) nos fornece a componente vertical de atração A :

$$A = G\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^h z dz \int_{r_1}^{r_2} r (r^2 + z^2)^{-3/2} dr \quad (6.2.5)$$

Escolhendo convenientemente os limites de integração e fazendo $r_1 = 0$ e r_2 variar até o infinito, temos que a integral:

$$\int_0^{\infty} r(r^2+z^2)^{-3/2} dr = \frac{-1}{(r^2+z^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z}$$

e portanto

$$A = G\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \quad (6.2.6)$$

ou

$$A = 2\pi G\rho h \quad (6.2.7)$$

Assumindo $\rho=2,67\text{gcm}^{-3}$ como o valor médio da densidade da crosta terrestre e $G=6,67 \times 10^{-8}\text{g}^{-1}\text{cm}^3\text{s}^{-2}$ como o valor da constante universal da gravitação, temos:

$$A = 0,1118h \quad (6.2.8)$$

sendo h medido em metros e A em miligal.

Até aqui admitimos um platô horizontal e "infinito" sem levarmos em consideração a curvatura da Terra. Devemos, pois, transformar esse platô numa "calota" de mesma espessura de raio 166,7km com centro na estação gravimétrica. Chamando de B esta correção, a redução de BOUGUER torna-se:

$$C_B = - (A+B) \quad (6.2.9)$$

Tomamos o raio 166,7km, arbitrariamente, e o mesmo coincide com o raio máximo das zonas literais de Hayford, ou seja, consideram-se as massas topográficas da região próxima da estação como sendo aquelas contidas na referida calota.

Consideraremos posteriormente a contribuição das massas topográficas exteriores à calota juntamente com a correção isostática.

Lembrando que admitimos uma calota de espessura constante; porém a superfície terrestre sendo irregular provoca uma alteração na correção de BOUGUER, portanto devemos ainda, efetuar uma correção devido a essas irregularidades topográficas, chamada correção do terreno (Geländereduktion).

Queremos chamar a atenção dos leitores para o fato da maioria dos autores negligenciar a referida correção. Concordamos que a mesma seja extremamente laboriosa na sua obtenção e o consumo de tempo para tal é bastante grande. Concordamos ainda, que a mesma atinge valores não desprezíveis em regiões não montanhosas. Levantamentos efetuados na região de Curitiba, região relativamente plana de altitude média de 900m, encontrou-se uma correção da ordem de 0,4mgal [01].

Seria justificável negligenciarmos tal correção no caso da inexistência de mapas ou ainda não fosse a precisão das medidas oferecida pelos modernos gravímetros que nos permitem leituras até 0,1mgal. Desta maneira, devemos levar em conta a influência das irregularidades topográficas (Geländereduktion) se quisermos rigorosidade no cálculo da correção de BOUGUER.

O propósito deste trabalho é exatamente encontrar um método pelo qual automatizemos as técnicas de obtenção da correção do terreno, reduzindo o tempo e o fastidioso processo manual até agora por nós usado.

Consideremos uma estação P na superfície terrestre cuja altitude h_p coincida com a espessura da calota de BOUGUER (fig. 5). As massas da região B devem ser eliminadas e, portanto, acarretarão

um aumento no valor de g na estação P . Por outro lado, na região A a calota de Bouguer eliminou massas que não existiam, logo, de vemos adicionar massas nessa região, ocasionando novamente um incremento em g . Assim, a correção do terreno é sempre positiva.

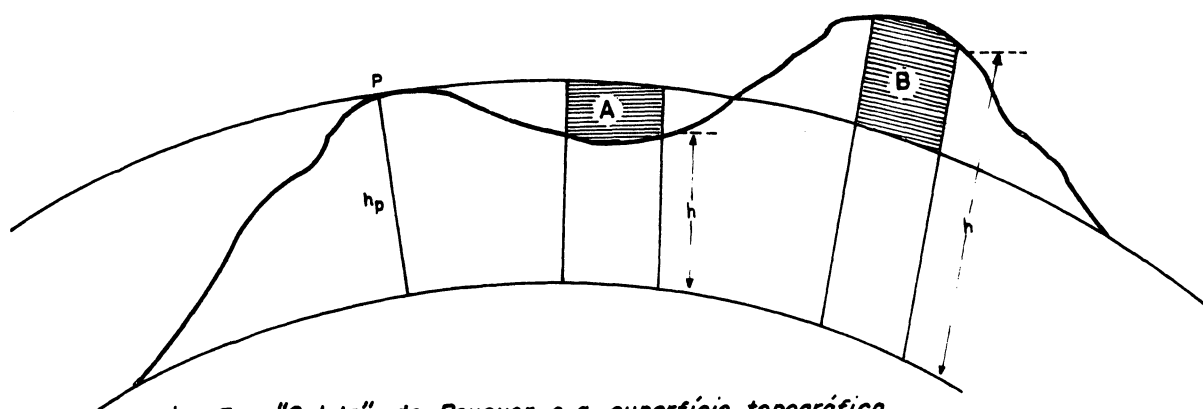


Fig. 5 — "Calota" de Bouguer e a superfície topográfica.

O cálculo da correção do terreno se faz dividindo o terreno em zonas por meio de circunferências concêntricas, denominadas zonas de Hayford, cujos raios foram fixados por HAYFORD arbitrariamente com o objetivo de simplificar as reduções isostáticas e mantidos até agora por simples tradição. Estas zonas são dividi-

das em compartimentos. Calcula-se a altitude média de cada compartimento e, então, é computada a atração das massas que deverão ser eliminadas ou adicionadas entre a estação e o compartimento de altitude média \bar{h} . A somatória das atrações devida a cada compartimento nos dá a influência total da zona sobre P.

A correção do terreno será dada pela componente vertical da atração das massas consideradas, a qual é fornecida pela (6.2.5) tomando-se convenientemente os intervalos de integração.

$$C = G_0 \int_0^\theta d\theta \int_0^{\bar{h}} z dz \int_{R_1}^{R_2} r(r^2+z^2)^{-3/2} dr$$

onde $\bar{h} = |h_P - h|$.

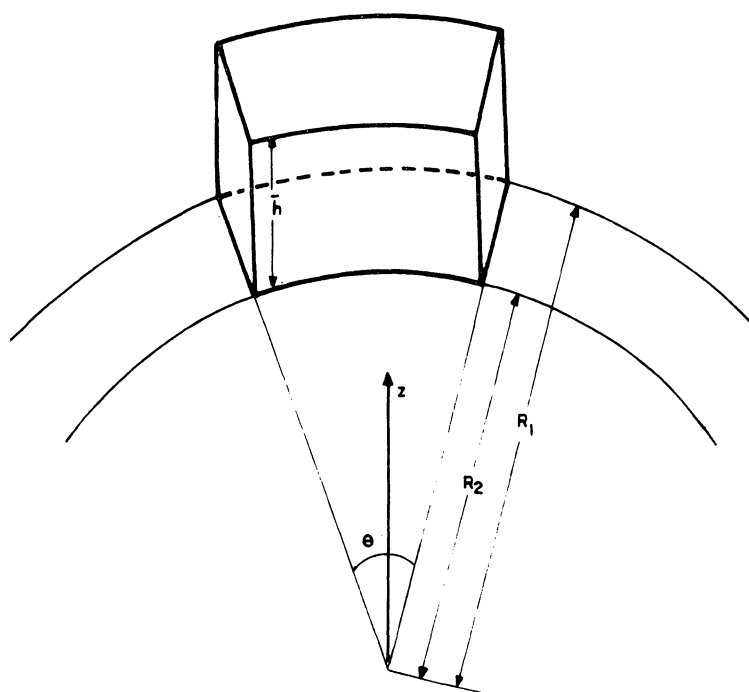


Fig. 6 — Correção do terreno

Tomemos um compartimento de altitude \bar{h} acima da estação, como mostra a figura 6. O valor de C referente à zona circular de altitude média \bar{h} será:

$$C = G\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\bar{h}} z \frac{(-1)}{(r^2+z^2)^{1/2}} \Big|_{R_1}^{R_2} dz$$

$$C = G\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\bar{h}} \left[\frac{-1}{(R_2^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{(R_1^2+z^2)^{1/2}} \right] z dz$$

$$C = G\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[- (R_2^2+z^2)^{1/2} + (R_1^2+z^2)^{1/2} \Big|_0^{\bar{h}} \right]$$

$$C = 2\pi G\rho \left[(R_1^2 + \bar{h}^2)^{1/2} - (R_2^2 + \bar{h}^2)^{1/2} + R_2 - R_1 \right] \quad (6.2.10)$$

O cansativo trabalho encontrado na correção do terreno consiste estritamente na obtenção da altitude média do compartimento uma vez que a mesma é conseguida através de cartas, por um processo algo subjetivo, dependendo do operador.

A grande vantagem do método proposto reside na possibilidade de obtermos a altitude de quantos pontos queiramos através de uma expressão matemática.

Não só na correção do terreno o cálculo da altitude média dos compartimentos é problema capital para as reduções gravimétricas, também a correção isostática depara-se com o mesmo tipo de dificuldade. Apesar de estarmos neste trabalho com o objetivo de obter a correção do terreno, alertamos o leitor que o mesmo pode se extrapolar para a referida correção.

Vimos até aqui que a correção de Bouguer é constituída de três partes:

$$C_B = -A -B +C$$

sendo A a componente vertical da atração exercida pelo platô horizontal, B converte o platô na calota e C a correção do terreno.

6.3 Reduções isostáticas

Em meados do século XIX, quando se fazia uma rede de triangulação no Himalaia, Índia, verificou-se a existência de uma diferença entre as latitudes geodésicas e as astronômicas, dos vértices Kaliana, no sopé do Himalaia, e Kaliampur 600km ao sul. Devido a grande precisão da rede de triangulação, um desvio de 5" encontrado não podia ser aceito.

J.H. PRATT, estudando esta discrepância, chegou à conclusão que a atração do Himalaia sobre Kaliana era a razão principal do fenômeno. Foi assim que após os cálculos efetuados observou que a diferença deveria ser de 15" e não apenas 5". Este resultado era algo novo e mostrava que 2/3 da atração horizontal do Himalaia sobre estas estações deviam ser compensados por uma deficiência de massa localizada sob a cordilheira.

Por este prisma surgiu a isostasia que estabelece a existência de um estado de equilíbrio da crosta terrestre devido à influência da gravidade.

A compensação do excesso ou deficiência de massa (continentes e oceanos respectivamente) em relação ao geóide pela deficiência ou excesso de densidade abaixo de tal superfície, é chamada de compensação isostática.

Quando, numa região, o equilíbrio isostático foi atingido completamente, tal região é dita compensada; sub-compensada quando o equilíbrio ainda não se completou e super-compensada se o equilíbrio foi ultrapassado.

A isostasia torna-se, então, uma ferramenta de grande valia para a Geodésia Física proporcionando-nos a transferência de massas topográficas para o interior do geóide, admitindo-se que o equilíbrio completo fora atingido. Isto feito, podemos aplicar o teorema de STOKES que exige a não existência de massas externas ao geóide.

6.3.1 Redução de PRATT-HAYFORD

PRATT esboçou o sistema isostático que leva o seu nome o qual foi colocado sob a forma analítica por HAYFORD que usou tal sistema metodicamente com propósitos geodésicos. Postulando a igualdade entre as massas topográficas e as chamadas "massas de compensação" que se estendem do geóide até uma determinada profundidade denominada profundidade de compensação, PRATT estabeleceu o equilíbrio isostático através da compensação isostática.

Admitindo-se blocos prismáticos de seção unitária, sejam eles continentais, litorâneos ou oceânicos, delimitados inferiormente pela "superfície de compensação" de profundidade H , os mesmos conteriam a mesma massa.

O princípio é ilustrado na figura 7.

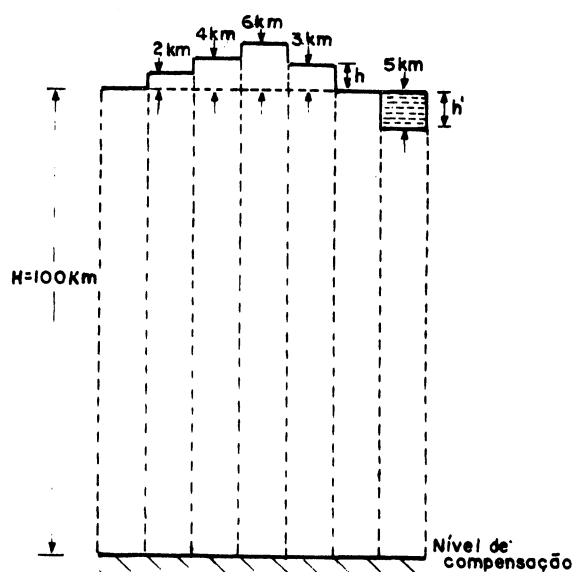


Fig. 7 — Modelo Pratt-Hayford

Seja H a profundidade do nível de compensação, contado a partir do geóide e ρ a densidade da coluna de altura H subjacente ao geóide. Sendo ρ_1 a densidade da coluna de altura h (onde h é a altura das massas topográficas), a isostasia nos permite estabelecer a seguinte igualdade

$$H\rho' = -h\rho_1 \quad (6.3.1.1)$$

onde $\rho' = \rho_1 - \rho$ denominada densidade de compensação.

A (6.3.1.1) expressa a condição de igualdade das massas topográficas e as correspondentes massas de compensação.

$$\rho' = - \frac{h}{H} \rho_1 \quad (6.3.1.2)$$

ou

$$\rho' = - \frac{h}{H+h} \rho \quad (6.3.1.3)$$

Em um "bloco oceânico" de profundidade h' , a condição de igualdade de massa é expressa como:

$$h' (\rho_1 - \rho_2) = (H - h')(\rho_1 - \rho_3) \quad (6.3.1.4)$$

onde ρ_2 é a densidade das águas dos mares e ρ_3 a densidade da coluna de altura $(H - h')$.

Assim, deve existir uma maior concentração de massas sob o leito dos oceanos, portanto há um excesso de massa sob os mesmos. A densidade de compensação é dada por:

$$\bar{\rho} = (\rho_1 - \rho_3) = \frac{h'}{H - h'} (\rho_1 - \rho_2) \quad (6.3.1.5)$$

As (6.3.1.1) e (6.3.1.5) não levam em consideração a convergência das verticais e também a variação de g com a profundidade e, portanto, são aproximadas.

A correção isostática consiste em duas partes:

a) aquela devido às massas de compensação das zonas literais (C_{IL}), uma vez que as massas topográficas destas zonas já foram consideradas na correção de Bouguer;

b) aquela devido tanto às massas de compensação como as massas topográficas das zonas numeradas de Hayford (C_{TIN}), chamada correção topo-isostática.

Temos, assim, a correção isostática:

$$C_I = C_{IL} + C_{TIN} \quad (6.3.1.6)$$

6.3.2 Redução de AIRY-HEISKANEN

Um sistema isostático completamente diferente do sistema de PRATT foi proposto por AIRY e modificado por HEISKANEN, conhecido atualmente como sistema de AIRY-HEISKANEN.

A figura abaixo ilustra o princípio.

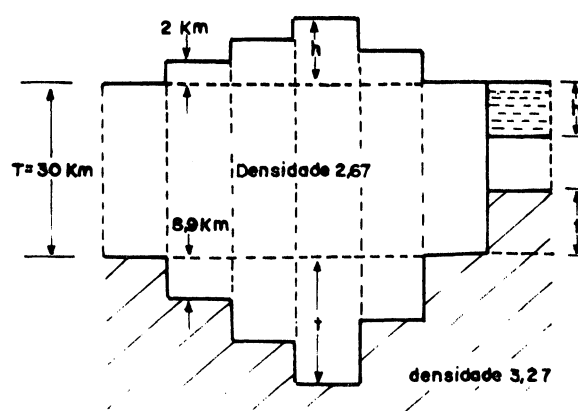


Fig. 8 — Modelo Airy Heiskanen

A densidade da crosta é considerada constante, o contrário ocorrendo com a profundidade de compensação. A litosfera é suposta flutuar sobre uma camada (o magma) também considerada de densidade constante. Desta maneira quanto mais alto o relevo mais profunda é a sua "raiz" (parte que mergulha no magma). Sob os oceanos forma-se uma "anti-raiz", ou seja, o sial se adelgaça. A "raiz" (densidade = $2,67 \text{ g/cm}^3$) ocupa o lugar material mais pesado (densidade = $3,27 \text{ g/cm}^3$) de maneira que o excesso da

montanha é compensado. O inverso acontecendo sob os oceanos, a "anti-raiz" ocupa lugar de material mais leve compensando as deficiências oceânicas.

Tomando prismas de seção unitária e chamando de \underline{T} a espessura "normal" da crosta (regiões ao nível do mar) e por \underline{t} a espessura da "raiz" ou da "anti-raiz", vem:

$$h\rho_0 = -t\Delta\rho$$

$$t = -\frac{\rho_0}{\Delta\rho} h = -4,45h \quad (6.3.2.1)$$

onde $\Delta\rho = (3,27 - 2,67)$.

Para uma região oceânica, temos:

$$t'\Delta\rho = -h'(\rho_0 - \rho_2)$$

$$t'(3,27 - 2,67) = -h'(2,67 - 1,027)$$

$$t' = -2,74 h' \quad (6.3.2.2)$$

A espessura da crosta sob as montanhas será, então:

$$\underline{T} + h + t$$

e sob os oceanos

$$\underline{T} - h' - t'$$

Da mesma maneira que no sistema de PRATT-HAYFORD, no sistema de AIRY-HEISKANEN a correção isostática é dado por:

$$C_I = C_{IL} + C_{TIN}$$

sendo:

C_{IL} a parcela devida às massas de compensação das zonas literais obtidas das tabelas de HEISKANEN e,

C_{TIN} a parcela devida às massas topográficas e de compensação das zonas numeradas obtidas das cartas mundiais do Instituto Isostático Internacional. Em se tratando do Brasil, podem ser obtidas das cartas de iso-correção preparadas pelo professor Camil Gemael do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodêsicas da Universidade Federal do Paranaẽ.

6.3.3 Redução de VENING-MEINESZ

Tanto o sistema de PRATT-HAYFORD como o de AIRY-HEISKANEN assumem uma compensação local, isto é, admitem-se que as massas de compensação situam-se abaixo das correspondentes massas topográficas. A rigor, esta asserção não pode ser admitida dentro dos conceitos físicos. Por esta razão, VENING-MEINESZ modificou o sistema de AIRY, introduzindo um sistema regional, onde as massas compensadoras estendem-se horizontalmente por uma área superior àquela ocupada pela topografia que as determinam. Em tal sistema as massas topográficas são consideradas como "cargas" capazes de fletir a crosta, que é assumida comportar-se como uma placa elástica, flutuando sobre o magma fluído e mais denso, suficientemente forte para resistir as tensões causadas pelas cargas.

VENING-MEINESZ através da fórmula de HERTZ sobre a flexão de uma placa elástica infinita e atribuindo valores médios à espessura e às características elásticas da crosta terrestre, obteve a curva de flexão da mesma, e admitiu que as massas de compensação estendem-se horizontalmente até uma distância R da

estação, chamada de raio de regionalidade. A densidade de compensação diminui com a distância a partir da vertical da estação onde é máxima, anulando-se à distância R .

6.3.4 Efeito indireto ou correção de BOWIE

A remoção ou transferência de massas que estão sujeitas às reduções gravimétricas altera o potencial gravitacional e, portanto o geóide. Esta variação no geóide é um efeito indireto das reduções gravimétricas, dando origem ao co-geóide. Desta maneira devemos pois reduzir g do geóide ao co-geóide. A correção que nos permite obter g reduzido ao co-geóide é denominada de efeito indireto ou efeito de BOWIE.

Sendo n a distância que separa o geóide do co-geóide, a equação de BRUN [04] nos diz que:

$$n = \frac{\Delta V}{g}$$

onde ΔV é a variação do potencial devido à transferência de massas.

O efeito indireto é obtido através da expressão:

$$C_{EI} = n \frac{\partial g}{\partial n}$$

sendo $\frac{\partial g}{\partial n} \sim \frac{2g}{a}$ o gradiente da gravidade e a o raio da Terra considerada esférica.

Assim, o efeito indireto se obtém segundo a equação:

$$C_{EI} = 2 \frac{\Delta V}{a}$$

Como o cálculo de ΔV é muito trabalhoso, existem tabelas, preparadas por LAMBERT e DARLING (1936) ou por LAJAY, que nos permitem obter o efeito indireto.

A anomalia da gravidade que é utilizada no teorema de STOKES será, então:

$$\Delta g = g + C_F + C_B + C_I + C_{EI} - \gamma$$

onde C_F , C_B , C_I e C_{EI} são respectivamente as correcções do ar-livre, Bouguer, isostática e efeito indireto.

CAPÍTULO II

SUPERFÍCIES DE SEGUNDA ORDEM

1. QUÁDRICAS

Uma quádrica é uma superfície definida por uma equação do segundo grau com três variáveis, cuja forma geral é:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + k = 0 \quad (1.1)$$

onde pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E e F é diferente de zero [07].

Quando interceptarmos uma quádrica por um plano qualquer teremos uma cônica ou cônica degenerada, ou seja, cortando a quádrica por um plano paralelo ao plano xy, plano de equação $z=k$, teremos:

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + J = 0$$

onde a equação obtida é do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ a qual representa uma cônica ou cônica degenerada situada no plano $z=k$. Podemos, desta forma, dizer que as quádricas são generalizações, no espaço, das cônicas.

2. EQUAÇÕES REDUZIDAS DAS QUÁDRICAS

Mediante rotação ou translação de eixos ou pelos dois movimentos simultaneamente, a equação geral pode ser convertida nos dois tipos seguintes:

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz \quad (2.2)$$

onde M, N e P podem ser obtidos a partir dos coeficientes da equação (1.1).

As superfícies do tipo (2.1) são denominadas quádricas centradas pelo fato de possuírem três planos de simetria, três eixos de simetria e um centro de simetria.

As superfícies do tipo (2.2) não possuem centro de simetria, tendo apenas dois planos e um eixo de simetria. E por isso, são chamadas de quádricas desprovidas de centro.

Limitar-nos-emos, neste trabalho, ao estudo das quádricas centradas uma vez que somente um dos tipos das mesmas nos interessará, como veremos em capítulo posterior.

3. QUÁDRICAS CENTRADAS

Estudemos, agora, as equações do tipo (2.1) e vejamos quais as superfícies que a mesma pode representar.

Vamos supor que o termo independente seja $\neq 0$.

3.1. Quando $\neq 0$, teremos

$$\frac{M}{Q}x^2 + \frac{N}{Q}y^2 + \frac{P}{Q}z^2 = 1$$

3.1.1 Fazendo M, N e P diferentes de zero

$$\frac{Q}{M} = \pm a^2 \quad \frac{Q}{N} = \pm b^2 \quad \frac{P}{O} = \pm c^2, \text{ vem}$$

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.1.1)$$

As equações do tipo (3.1.1) são chamadas de "forma canônica" das quádricas de centro, que podem ser classificadas, quanto aos seus coeficientes, em quatro casos:

- a) todos os coeficientes positivos;
- b) dois coeficientes positivos e um negativo;
- c) um coeficiente positivo e dois negativos;
- d) todos os coeficientes negativos.

Analisemos cada um dos casos.

3.1.1.a Todos os coeficientes positivos

A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ representa um elipsóide com centro na origem.

Caso $a=b=c$ a equação representará uma esfera com centro em $(0,0,0)$ e raio \underline{a} . Se o centro da mesma estiver situado em (h,k,j) a equação tomará a forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-j)^2 = a^2$$

Caso $a \neq b$, mas $b=c$, teremos um elipsóide de revolução com centro na origem, como mostra a fig. 1.

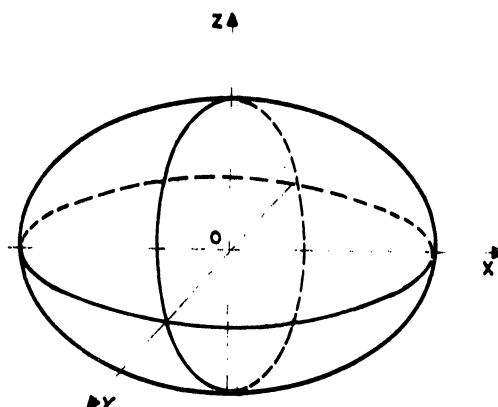


Fig. 1 — *Elipsóide de revolução*

3.1.1.b Dois coeficientes positivos e um negativo

A equação (3.1.1) toma uma das seguintes formas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Quando apenas um dos termos das equações tem sinal negativo, a superfície recebe o nome de hiperbolóide de uma folha.

Verifica-se que o hiperbolóide estende-se sempre ao longo do eixo correspondente à variável de coeficiente negativo na forma canônica.

Para $a=b$, a superfície é o hiperbolóide de revolução de uma folha.

As seções paralelas aos planos xz e yz são hipérboles. As seções paralelas ao plano xy são elipses, exceto no hiperbolóide de revolução onde as seções são circunferências, para o caso do coeficiente de z ser negativo. Veja fig. 2.

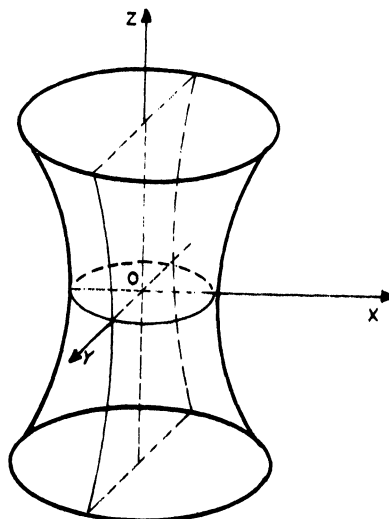


Fig. 2 — *Hiperbolóide de uma folha.*

3.1.1.c Um coeficiente positivo e dois negativos

A equação (3.1.1) toma uma das seguintes formas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$- \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$- \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

As equações acima representam, cada uma delas, um hiperbolóide de duas folhas.

As equações têm analogia com a do elipsóide, mas duas variáveis são precedidas do sinal menos.

Para $b = c$, a superfície será uma superfície de revolução, ou seja, um hiperbolóide de revolução de duas folhas.

Verificamos que nas outras formas da equação representativa do hiperbolóide de duas folhas ele estende-se sempre ao longo do eixo correspondente à variável de coeficiente positivo na sua equação canônica.

As seções paralelas aos planos xy e xz são hipérbolas, e as seções paralelas ao plano yz são elipses, exceto no hiperbolóide de revolução, onde as seções são circunferências, como mostra a fig. 3.

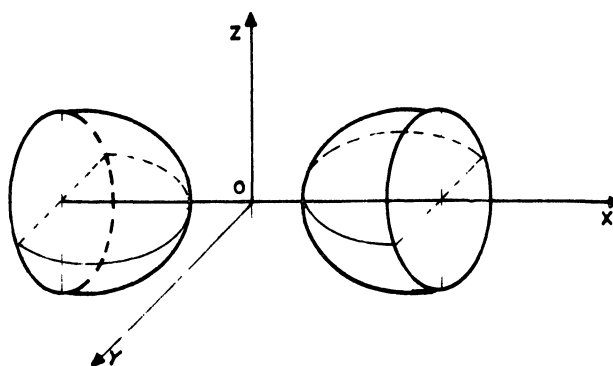


Fig.3 — Hiperbolóide de duas folhas

3.1.1.d Todos os coeficientes negativos

Neste caso, a equação (3.1.1) toma a seguinte forma:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Podemos observar que as soluções desta equação serão sempre imaginárias e, portanto, a mesma não representa no campo

real nenhum lugar. Porém, devido sua analogia com a equação do elipsóide, convencionou-se chamá-la equação da superfície do elipsóide imaginário.

Tomemos, novamente, a equação $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = Q$ ainda com $Q > 0$ e estudemos o seguinte caso.

3.1.2 Quando apenas um dos coeficientes M , N ou P for nulo.

Façamos $P=0$, $M \neq 0$ e $N \neq 0$.

A equação (2.1) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$Mx^2 + Ny^2 = Q$$

Lembrando-se que $Q > 0$, podemos escrever a equação $Mx^2 + Ny^2 = Q$ como segue

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1.2)$$

3.1.2.a Quando $M > 0$ e $N > 0$.

A equação (3.1.2) torna-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta equação representa um cilindro elíptico reto. (fig. 4)

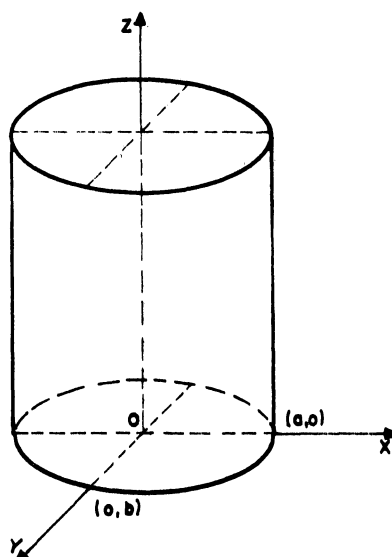


Fig. 4 — Cilindro elíptico reto

3.1.2.b Quando $M < 0$ e $N < 0$, vem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Equação representativa de um cilindro imaginário.

3.1.2.c Quando M e N forem de sinais contrários, teremos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equações que representam cilindros hiperbólicos retos.

Finalmente, analisemos a equação (2.1) no caso que segue e vejamos o que ela pode representar.

3.1.3 Quando dois dos coeficientes M , N ou P forem simultaneamente nulos.

Façamos $P=0$ e $N=0$, da equação (2.1), vem:

$$Mx^2 = Q \quad \text{então} \quad x = \pm \sqrt{\frac{M}{Q}}$$

Equação que representa dois planos reais ($M>0$) ou imaginários ($M<0$) paralelos ao plano yz .

Até agora estudamos as superfícies com $Q>0$, vejamos adiante quando Q assumir o valor zero.

3.2 Quando $Q = 0$

A equação (2.1) transforma-se em:

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 0$$

3.2.1 Quando nenhum desses coeficientes for nulo.

Fazendo $NP=a^2$, $MP=b^2$ e $MN=c^2$, vem:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.2.1)$$

Equações estas que podem ser subdivididas em três tipos, quanto aos seus coeficientes:

- a) todos os coeficientes de mesmo sinal;
- b) dois coeficientes positivos e um negativo;
- c) dois coeficientes negativos e um positivo.

3.2.1.a Todos os coeficientes de mesmo sinal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Equação que representa um ponto que é a origem.

3.2.1.b Dois coeficientes positivos e um negativo

A equação (2.1) toma as seguintes formas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Equações que representam cones elípticos com v̄rtices na origem.

Caso $a=b$, teremos cones circulares retos ou cones de revolução. (fig. 5)

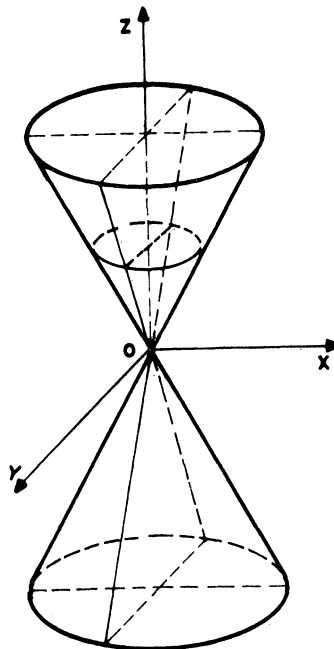


Fig. 5— *Cone circular reto*

Alertamos, aqui, o leitor que o estudo dos cones circulares retos será de importância fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Desta forma convém lembrar que um cone cujo v̄rtice possui coordenadas $(h,k,0)$ fica definido pela seguin

te equação:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ou

$$z = \frac{c}{a} \left[(x-h)^2 + (y-k)^2 \right]^{1/2}$$

3.2.1.c Dois coeficientes negativos e um positivo

A equação (2.1) toma as seguintes formas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$- \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$- \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Se fizermos $z=k$ na última equação, teremos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$$

que é uma elipse. Portanto, como as equações em 3.2.1.b, estas também representam cones elípticos com vértice na origem.

3.2.2 Quando apenas um dos coeficientes for nulo

Façamos $P=0$, $M \neq 0$ e $N \neq 0$.

A equação (2.1) torna-se:

$$Mx^2 + Ny^2 = 0$$

Chamando $\frac{1}{M} = \pm a^2$ e $\frac{1}{N} = \pm b^2$, teremos:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (3.2.2)$$

Teremos, assim, dois casos:

- a) dois coeficientes de mesmo sinal;
- b) dois coeficientes de sinais contrários.

3.2.2.a Dois coeficientes de mesmo sinal

A equação (3.2.2) torna-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{yi}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{yi}{b}\right) = 0$$

equação que representa dois planos imaginários ou uma reta real, que é o eixo z.

3.2.2.b Dois coeficientes de sinais contrários

A equação (3.2.2) transforma-se em:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

equação que representa dois planos concorrentes ou uma reta real, que é o eixo z.

3.2.3 Quando dois coeficientes forem nulos

Fazendo $P=0$, $N=0$ e $M \neq 0$, teremos a equação (2.1) transformada em:

$$Mx^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = 0$$

equação que representa dois planos coincidentes com o plano yz .

QUADRO GERAL DAS QUÁDRICAS CENTRADAS

<div> <div>Q > 0</div> <div>ELIPSÓIDES HIPERBOLÓIDES FORMAS DEGENERADAS</div> </div>	TRÊS COEFICIENTES DIFERENTES DE ZERO	a) três coeficientes positivos → elipsóide b) dois coeficientes positivos → hiperbolóide de uma folha c) um coeficiente positivo → hiperbolóide de duas folhas d) três coeficientes negativos → nenhum lugar
	UM DOS COEFICIENTES NULO	a) dois coeficientes positivos → cilindro elíptico reto b) dois coeficientes negativos → cilindro elíptico imaginário c) coeficientes de sinais contrários → cilindro hiperbólico reto
	DOIS DOS COEFICIENTES NULOS	dois planos paralelos ou imaginários
	TRÊS COEFICIENTES DIFERENTES DE ZERO	a) três coeficientes do mesmo sinal → um ponto real b) dois coeficientes positivos → cone elíptico c) um coeficiente positivo → cone elíptico
<div> <div>Q = 0</div> <div>CONES OU FORMAS DEGENERADAS</div> </div>	UM DOS COEFICIENTES NULO	a) coeficientes do mesmo sinal → dois planos imaginários ou uma reta real b) coeficientes de sinais contrários → dois planos concorrentes ou uma reta real
	DOIS COEFICIENTES NULOS	dois planos coincidentes

CAPÍTULO III

ALTITUDES TOPOGRÁFICAS OBTIDAS ATRAVÉS DAS MULTIQUÁDRICAS APLICADAS NA CORREÇÃO DO TERRENO

1. INTRODUÇÃO

A parte mais cansativa e morosa na redução de BOUQUER consiste na obtenção da correção do terreno. A laboriosidade não reside especificamente no cálculo da mesma, que se faz através de uma simples fórmula, mas sim na obtenção da altitude média dos compartimentos das zonas de Hayford ou das zonas de Hammer, o que se consegue somente com um hábil e experiente operador.

Em face deste problema têm surgido ultimamente alguns métodos operacionais que utilizam computadores eletrônicos com o objetivo de reduzir o consumo de tempo empregado na obtenção destas altitudes médias e de nosse das mesmas temos condições de calcular a referida correção.

Propusemo-nos, neste trabalho, encontrar uma solução que nos conduzisse a este objetivo, ou seja, implantar um método pelo qual automatizássemos o processo de obtenção da correção do terreno fazendo uso de computadores eletrônicos.

Para alcançarmos tal propósito, devemos, antes de mais nada, achar uma equação que nos permita calcular a altitude

de cada ponto sobre a superfície topográfica da área em estudo para depois calcularmos a altitude média dos compartimentos de Hayford e em seguida obtermos a correção do terreno.

Desta forma, a superfície topográfica deve ser representada por uma equação. A mesma pode ser representada por vários métodos como o numérico, o digital, o analítico, além das clássicas curvas de nível.

Existem duas maneiras de enfocarmos o problema da representação da superfície:

a) dada uma informação topográfica contínua de uma certa região, reduzi-la a uma série discreta de pontos;

b) dada uma série discreta de pontos da superfície topográfica, reduzi-la a uma função contínua que represente satisfatoriamente a superfície topográfica.

O segundo enfoque é o que nos traz interesse, isto é, a partir de alguns pontos significativos da superfície topográfica, representá-la através de uma função contínua. Com tal função, podemos facilmente determinar a altitude de qualquer ponto desta superfície.

A superfície terrestre, como sabemos, é totalmente irregular, e por isso qualquer tentativa em representá-la através de uma equação matemática será apenas uma aproximação. Tanto mais representativa será a equação quanto maior for o número de informações que obtivermos da superfície.

Investigações têm sido feitas no sentido de se encontrar equações representativas da superfície da Terra. Assim, têm sido usadas as séries de Fourier ou as séries harmônicas como aproximações de tal superfície. Porém estes modelos exigem um grande número de pontos da topografia para que se possa obter

resultados aceitáveis.

HARDY [02] investigando este problema, propôs um modelo matemático baseado nas superfícies de segunda ordem.

2. SUPERFÍCIES MULTIQUÁDRICAS

Como vimos no Capítulo II, as superfícies de segunda ordem ou as quádricas podem ser expressas pela (1.1) ou pelas (2.1) e (2.2) (equações referentes ao segundo capítulo), ou ainda de uma maneira mais genérica, temos [02]

$$c \left[q(x_c, y_c, x, y) \right] = z \quad (2.1)$$

onde z é uma função de x e y ; e q uma quádrica qualquer. Pelo ponto x_c e y_c passa o eixo vertical de simetria da superfície. O coeficiente c determina o sinal algébrico e o achatamento da mesma.

A superfície aproximada do relevo topográfico proposta por HARDY apoia-se nas quádricas e foi denominada superfície multiquádrica, expressa por

$$\sum_{j=1}^n c_j \left[q(x_j, y_j, x, y) \right] = z \quad (2.2)$$

sendo z a resultante da somatória de uma família de quádricas q .

Tomemos por exemplo uma superfície multiquádrica expressa pela (2.2) representativa de hiperbolóide circular de duas folhas, assim a (2.2) torna-se:

$$\sum_{j=1}^n c_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + c \right]^{1/2} = z \quad (2.3)$$

No caso da constante C ser nula a (2.3) representará uma somatória de cones circulares retos, equação análoga ressaltada no tópico 3.2.1.b do Capítulo II.

3. EQUAÇÃO DA TOPOGRAFIA

A teoria das superfícies multiquádricas pode ser aplicada com objetivo de nos fornecer a equação da topografia, ou seja, a equação da superfície física de uma região terrestre.

Para que possamos obter a equação da topografia, necessitamos conhecer as coordenadas de uma série de pontos, que aqui chamaremos de pontos fundamentais, da superfície topográfica, como por exemplo, cume das montanhas, pontos de sela, depressões altos e baixos do limite de um perfil, mudanças repentinas da declividade, ligações e variações significativas nos alinhamentos dos vales e outros pontos que possam nos fornecer informações importantes sobre o terreno. De posse dos mesmos, podemos então achar a equação da superfície que ajusta exatamente todos os pontos fundamentais e proporciona uma interpolação lógica em pontos intermediários.

Dentre as quádricas, uma superfície particular que apresenta bons resultados como modelo é aquela dada pela (2.3) fazendo $C=0$. A família de quádricas assim adotada é uma família de cones circulares retos cujos eixos de simetria passam por x_j, y_j .

Queremos ressaltar aqui, que outras famílias de quádricas poderão eventualmente, ser adotadas como modelo. Fato não investigado neste trabalho, sendo deixado para uma futura etapa, uma vez que dentro de certos limites o modelo aqui proposto mostrou-se aceitável.

É conveniente colocarmos a (2.3) em um sistema de n equações lineares com n incógnitas. O lado esquerdo é arranjado em i linhas e j colunas, enquanto que o lado direito é simplesmente uma coluna, tornando-se assim em

$$\sum_{j=1}^n c_j \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} = z_i \quad (2.4)$$

$i=1,2,\dots,n$

A determinação dos coeficientes c_j é feita da maneira que se segue.

Tomamos n pontos fundamentais sobre o terreno e introduzimos suas coordenadas (x_1, y_1, z_1) a (x_n, y_n, z_n) na (2.4), de tal maneira que cada ponto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) nos forneça uma equação. As coordenadas (x_j, y_j) são também as coordenadas dos pontos fundamentais as quais estarão presentes em todas as n equações obtidas com as coordenadas (x_i, y_i, z_i) . Assim a variação de j antecede a variação de i.

Desenvolvendo a (2.4), vem:

$$\begin{aligned} & c_1 \left[(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2 \right]^{1/2} + c_2 \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{1/2} + \\ & + c_3 \left[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right]^{1/2} + \dots + c_n \left[(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 \right]^{1/2} = z_1 \\ & c_1 \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right]^{1/2} + c_2 \left[(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 \right]^{1/2} + \\ & + c_3 \left[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right]^{1/2} + \dots + c_n \left[(x_n - x_2)^2 + (y_n - y_2)^2 \right]^{1/2} = z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \left[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \right]^{1/2} + c_2 \left[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right]^{1/2} + \\
& + c_3 \left[(x_3 - x_3)^2 + (y_3 - y_3)^2 \right]^{1/2} + \dots + c_n \left[(x_n - x_3)^2 + (y_n - y_1)^2 \right]^{1/2} = z_3 \\
& \quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
& \quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
& \quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
& c_1 \left[(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 \right]^{1/2} + c_2 \left[(x_2 - x_n)^2 + (y_2 - y_n)^2 \right]^{1/2} + \\
& + c_3 \left[(x_3 - x_n)^2 + (y_3 - y_n)^2 \right]^{1/2} + \dots + c_n \left[(x_n - x_n)^2 + (y_n - y_n)^2 \right]^{1/2} = z_n
\end{aligned}$$

A resolução do sistema nos fornece os coeficiente c_j .

Podemos também expressar a (2.4) em notação matricial.

Seja X vetor coluna dos coeficientes a determinar

$$X = [c_j] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

e seja A a matriz X ($n \times n$) dos elementos conhecidos

$$A = [a_{ij}]$$

onde

$$a_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

e, finalmente, seja B o vetor coluna dos termos independentes

z_i

$$B = [z_i] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Então, a (2.4) se reduz a

$$AX = B$$

que tem como solução

$$X = A^{-1}B$$

Determinados os valores de c_j , os mesmos são substituídos na (2.3), e assim temos a equação da topografia.

A altitude de qualquer ponto (x,y) da superfície pode ser calculada usando a:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 \right]^{1/2}$$

Uma equação da topografia baseada nas multiquádricas e exige que os pontos fundamentais sejam escolhidos com critério e habilidade posto que deles dependerá a aproximação que desejamos na representação da superfície topográfica real. Se tomarmos arbitrariamente pontos sobre o terreno e esperarmos que os mesmos representem a topografia, estaremos incorrendo em um erro que não nos conduzirá ao objeto final. Portanto, a escolha destes pontos é fundamental para a obtenção da equação da topografia que realmente possa representar a superfície real do relevo.

Ao tomarmos a (2.3) com $C=0$, os vértices de cones circulares retos estarão localizados no plano xy cujas coordenadas são aquelas dadas pelos pontos fundamentais, isto é, x_j e y_j . Os coeficientes c_j associados a cada ponto fundamental nos fornecem

a declividade do cone em relação ao plano xy , sendo que o sinal algébrico nos informa qual das superfícies do cone de duas folhas é introduzido na somatória; a magnitude dos mesmos influencia o achatamento do cone.

4. SIMULAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE TOPOGRÁFICA

Tomemos uma superfície topográfica fictícia e investiguemos a praticabilidade das multiquádricas.

A figura 1 representa um modelo topográfico que será usado como padrão de referência para comparação com as equações multiquádricas.

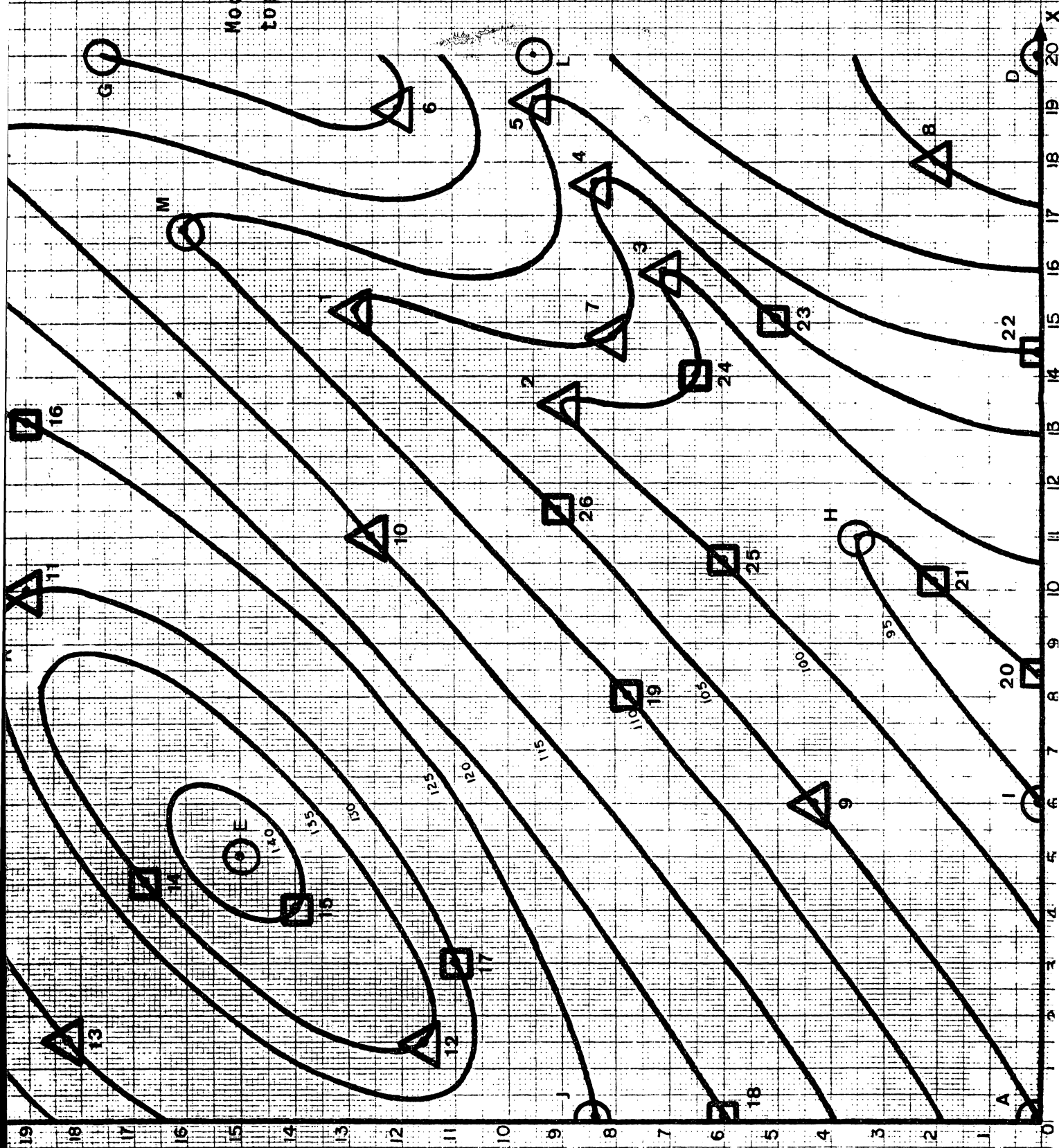
Adotemos um sistema de coordenadas retangulares com a origem em A e escolhamos inicialmente $n=13$ pontos fundamentais.

Analisemos a escolha destes pontos. Quatro pontos são tomados nos vértices do quadrilátero ABCD o qual delimita a área que desejamos representar; seis pontos que determinam os altos e baixos dos perfis limitantes do quadrilátero ABCD e três pontos no interior do mesmo. Um dos pontos interiores define o cume do morro existente na área; um outro define a junção dos canais de drenagem. Este ponto juntamente com três dos lados do quadrilátero definem o padrão de drenagem. Um terceiro ponto interior M define o aspecto topográfico no centro da região limitado pelo quadrilátero EFGH. Existem pelo menos três possibilidades topográficas que poderão logicamente ocorrer:

- a) um vale que se estende de F até H;
- b) uma crista entre E e G;
- c) um ponto de sela em M ou próximo dele.

Quando o ponto M for omitido, a superfície multiquádrica nos fornece um ponto de sela nesta região. Quando o incluirmos,

[FIG.1]
Modelo simulado da
topografia de uma
região



teremos uma razoável aproximação do terreno. Isto ilustra que devemos analisar com cuidado a distribuição e densidade dos pontos fundamentais antes de os escolhermos.

Para $n=13$, isto é, com 13 pontos fundamentais determinamos os coeficientes c_j da equação da topografia, como mostra o quadro 1. Tomamos uma amostragem de oitenta pontos quaisquer da superfície cujas coordenadas (x, y e z) são conhecidas através da fig. 1, com as coordenadas x e y destes pontos calculamos com o auxílio da equação da topografia os respectivos valores de z que são comparados com os valores de z obtidos do mapa.

Como podemos observar, 36 pontos, 45% da amostra, sofreram um desvio superior a $|2,5|$ e inferior a $|5,9|$, dando-nos uma discrepância média (*) de valor 2,96m. Uma vez que a equidistância das curvas de nível é de 5m, verificamos a necessidade de tomar um maior número de pontos fundamentais, que nos proporcionará uma menor discrepância média.

Ao inspecionarmos os pontos representados pelas letras de A a M da fig. 1, verificamos que a densidade dos mesmos é pequena e portanto, necessitamos de maiores informações da superfície, mormente na área delimitada pelo quadrilátero EMLH.

Façamos então $n=26$, e escolhamos mais 13 pontos fundamentais, representados pelos números de 1 a 13; 7 deles interiores ao quadrilátero EMLH e os outros 6 distribuídos conforme mostra a fig. 1.

Com esta densificação de pontos, os resultados melhoraram

(*) Chamamos, aqui, discrepância média à expressão

$$D.M. = \sqrt{\frac{\sum d^2_i}{n}}$$

onde d é o desvio entre a altitude calculada \underline{z} e a altitude obtida das curvas de nível

Quadro 1 - Comparação das altitudes extraídas do gráfico com aquelas obtidas através das multiquadrículas. N = 13

Nº de ordem	Coordenadas dos pontos fundamentais		Coordenadas dos pontos da amostragem			Z calculado	Desvio
	XF	YF	X	Y	Z	ZC	DZ
01	0.0	0.0	0.0	4.0	115.0	112.8	-2.2
02	0.0	20.0	0.0	12.0	129.0	130.1	1.1
03	20.0	20.0	0.0	18.4	120.0	121.1	1.1
04	20.0	0.0	1.0	2.5	110.0	106.4	-3.6 *
05	5.0	15.0	1.0	6.6	120.0	118.0	-2.0
06	18.5	20.0	1.0	10.2	130.0	127.1	-2.9 *
07	20.0	17.5	18.0	10.7	115.0	112.5	-2.5
08	10.9	3.5	1.0	19.5	120.0	119.4	-0.6
09	6.0	0.0	2.0	10.6	130.0	127.2	-2.8 *
10	0.0	8.0	2.0	13.7	135.0	133.2	-1.8
11	9.0	20.0	2.0	15.2	130.0	133.1	3.1 *
12	20.0	9.5	3.0	3.8	110.0	104.8	-5.2 *
13	16.7	16.0	3.0	9.3	125.0	122.3	-2.7 *
14			3.0	11.8	135.0	130.2	-4.8 *
15			3.0	15.2	135.0	136.4	1.4
16			3.0	16.3	130.0	134.3	4.3 *
17			3.0	19.4	125.0	126.2	1.2
18			4.0	0.3	100.0	98.5	-1.5
19			4.0	12.4	135.0	132.5	-2.5
20			4.0	15.0	140.0	140.4	0.4
21			4.0	20.0	125.0	128.1	3.1 *
22			5.0	7.4	115.0	112.1	-2.9 *
23			5.0	11.9	130.0	129.8	-0.2
24			12.5	10.0	105.0	108.7	3.7 *
25			5.0	14.1	140.0	140.2	0.2
26			5.0	16.0	140.0	140.4	0.4
27			6.0	10.0	120.0	120.1	0.1
28			6.0	13.8	135.0	136.4	1.4
29			6.0	17.8	135.0	133.9	-1.1
30			6.0	18.7	130.0	132.1	2.1
31			12.5	11.9	110.0	111.9	1.9
32			7.0	0.8	95.0	95.3	0.3
33			7.0	6.9	110.0	106.8	-3.2 *
34			7.0	9.1	115.0	114.7	-0.3
35			19.0	3.0	120.0	116.5	-3.5 *
36			7.0	11.6	125.0	124.4	-0.6
37			9.0	0.8	95.0	96.5	1.5
38			9.0	2.4	95.0	95.5	0.5
39			9.0	4.5	100.0	97.7	-2.3
40			9.0	12.5	120.0	121.6	1.6
41			12.5	13.8	115.0	114.6	-0.4
42			10.0	3.0	95.0	95.3	0.3
43			10.0	7.7	105.0	105.3	0.3
44			10.0	13.5	120.0	120.8	0.8
45			12.5	16.0	120.0	117.1	-2.9 *
46			10.0	18.0	130.0	125.8	-4.2 *
47			19.0	6.9	115.0	114.6	-0.4
48			12.0	7.4	100.0	103.6	3.6 *
49			12.0	9.5	105.0	108.1	3.1 *
50			12.0	11.4	110.0	111.9	1.9
51			12.0	13.4	115.0	115.2	0.2
52			12.0	15.5	120.0	117.8	-2.2
53			12.0	17.0	125.0	119.5	-5.5 *
54			13.0	0.0	105.0	104.5	-0.5
55			13.0	3.9	100.0	99.8	-0.2
56			13.0	8.5	100.0	105.8	5.8 *
57			13.0	10.6	105.0	109.3	4.3 *
58			13.0	16.6	120.0	116.6	-3.4 *
59			14.0	3.3	105.0	102.1	-2.9 *
60			14.0	5.0	100.0	102.4	2.4
61			14.0	11.7	105.0	110.1	5.1 *
62			14.0	15.3	115.0	113.1	-1.9
63			14.5	6.4	100.0	104.3	4.3 *
64			15.0	2.2	110.0	105.0	-5.0 *
65			15.0	5.8	100.0	104.8	4.8 *
66			15.0	6.6	100.0	105.3	5.3 *
67			15.0	10.8	105.0	109.1	4.1 *
68			15.0	12.7	105.0	110.4	5.4 *
69			15.0	14.4	110.0	111.1	1.1
70			15.0	16.3	115.0	112.2	-2.8 *
71			15.0	19.0	120.0	116.2	-3.8 *
72			17.0	3.3	115.0	110.1	-4.9 *
73			12.5	17.7	125.0	119.1	-5.9 *
74			17.0	7.1	105.0	109.4	4.4 *
75			17.0	8.2	105.0	109.8	4.8 *
76			17.0	9.0	110.0	110.1	0.1
77			17.0	18.5	115.0	113.5	-1.5
78			20.0	3.5	120.0	119.4	-0.6
79			20.0	8.0	115.0	117.5	2.5
80			20.0	12.2	120.0	117.4	-2.6 *

* Desvio superior a 2,5m: 36 pontos

Discrepância média: 3.0m

Quadro 2 - Comparação nas altitudes extraídas do gráfico com aquelas obtidas através das multiquádricas. N = 26

Nº de ordem	Coordenadas dos pontos fundamentais		Coordenadas dos pontos da amostragem			Z calculado	Desvio
	XF	YF	X	Y	Z	ZC	DZ
01	0.0	0.0	0.0	4.0	115.0	113.4	-1.6
02	0.0	20.0	0.0	12.0	129.0	134.0	5.0 *
03	20.0	20.0	0.0	18.4	125.0	121.6	-3.4
04	20.0	0.0	1.0	2.5	110.0	107.1	-2.9 *
05	5.0	15.0	1.0	6.6	120.0	119.0	-1.0
06	18.5	20.0	1.0	10.2	130.0	130.3	0.3
07	20.0	17.5	18.0	10.7	115.0	111.2	-3.8 *
08	10.9	3.5	1.0	19.5	120.0	119.6	-0.4
09	6.0	0.0	2.0	10.6	130.0	131.6	1.6
10	0.0	8.0	2.0	13.7	135.0	136.4	1.4
11	9.0	20.0	2.0	15.2	130.0	135.1	5.1 *
12	20.0	9.5	3.0	3.8	110.0	106.5	-3.5 *
13	16.7	16.0	3.0	9.3	125.0	125.4	0.4
14	15.3	12.8	3.0	11.8	135.0	134.2	-0.8
15	13.5	8.9	3.0	15.2	135.0	137.8	2.8 *
16	16.0	7.0	3.0	16.3	130.0	135.3	5.3 *
17	17.7	8.4	3.0	19.4	125.0	126.4	1.4
18	19.2	9.2	4.0	0.3	100.0	99.1	-0.9
19	19.0	12.0	4.0	12.4	135.0	135.2	0.2
20	14.9	7.9	4.0	15.0	140.0	141.3	1.3
21	18.0	2.0	4.0	20.0	125.0	128.2	3.2 *
22	6.0	4.3	5.0	7.4	115.0	114.8	-0.2
23	11.0	12.5	5.0	11.9	130.0	132.0	2.0
24	10.0	19.0	12.5	10.0	105.0	103.9	-1.1
25	1.5	11.5	5.0	14.1	140.0	141.0	1.0
26	1.6	18.3	5.0	16.0	140.0	140.6	0.6
27			6.0	10.0	120.0	122.0	2.0
28			6.0	13.8	135.0	137.1	2.1
29			6.0	17.8	135.0	134.2	-0.8
30			6.0	18.7	130.0	132.4	2.4
31			12.5	11.9	110.0	106.5	-3.5 *
32			7.0	0.8	95.0	96.1	1.1
33			7.0	6.9	110.0	109.0	-1.0
34			7.0	9.1	115.0	116.1	1.1
35			19.0	3.0	120.0	118.9	-1.1
36			7.0	11.6	125.0	125.4	0.4
37			9.0	0.8	95.0	97.4	2.4
38			9.0	2.4	95.0	96.6	1.6
39			9.0	4.5	100.0	98.9	-1.1
40			9.0	12.5	120.0	121.5	1.5
41			12.5	13.8	115.0	112.7	-2.3
42			10.0	3.0	95.0	95.9	0.9
43			10.0	7.7	105.0	104.2	-0.8
44			10.0	13.5	120.0	120.6	0.6
45			12.5	16.0	120.0	117.0	-3.0 *
46			10.0	18.0	130.0	128.3	-1.7
47			19.0	6.9	115.0	110.6	-4.4 *
48			12.0	7.4	100.0	100.6	0.6
49			12.0	9.5	105.0	103.8	-1.2
50			12.0	11.4	110.0	108.7	-1.3
51			12.0	13.4	115.0	113.4	-1.6
52			12.0	15.5	120.0	117.6	-2.4
53			12.0	17.0	125.0	120.5	-4.5 *
54			13.0	0.0	105.0	105.8	0.8
55			13.0	3.9	100.0	99.2	-0.8
56			13.0	8.5	100.0	100.6	0.6
57			13.0	10.6	105.0	104.5	-0.5
58			13.0	16.6	120.0	116.7	-3.3 *
59			14.0	3.3	105.0	102.2	-2.8 *
60			14.0	5.0	100.0	100.5	0.5
61			14.0	11.7	105.0	105.2	0.2
62			14.0	15.3	115.0	111.7	-3.3 *
63			14.5	6.4	100.0	101.1	1.1
64			15.0	2.8	110.0	106.0	-4.0 *
65			15.0	5.8	100.0	101.4	1.4
66			15.0	6.6	100.0	101.3	1.3
67			15.0	10.8	105.0	104.1	-0.9
68			15.0	12.7	105.0	105.2	0.2
69			15.0	14.4	110.0	108.5	-1.5
70			15.0	16.3	115.0	111.7	-3.3 *
71			15.0	19.0	120.0	116.7	-3.3 *
72			17.0	3.3	115.0	111.9	-3.1 *
73			12.5	17.7	125.0	120.2	-4.8 *
74			17.0	7.1	105.0	103.1	-1.9
75			17.0	8.2	105.0	103.7	-1.3
76			17.0	9.0	110.0	104.7	-5.3
77			17.0	18.5	115.0	113.7	-1.3
78			20.0	3.5	120.0	120.6	0.6
79			20.0	8.0	115.0	114.7	-0.3
80			20.0	12.2	120.0	121.8	1.8

* Desvio superior a 2.5m : 20 pontos

Discrepância média : 2.3 m

Quadro 3 - Comparação das altitudes extraídas do gráfico com aquelas obtidas através das multiquádricas. N = 39

Nº de ordem	Coordenadas dos pontos fundamentais		Coordenadas dos pontos de amostragem			Z calculado	Desvio
	XF	YF	X	Y	Z	ZC	DZ
01	0.0	0.0	0.0	4.0	115.0	114.1	-0.9
02	0.0	20.0	0.0	12.0	129.0	134.1	5.1 *
03	20.0	20.0	0.0	18.4	120.0	121.9	1.9
04	20.0	0.0	1.0	2.5	110.0	107.5	-2.5
05	5.0	15.0	1.0	6.6	120.0	119.5	-0.5
06	18.5	20.0	1.0	10.2	130.0	130.5	0.5
07	20.0	17.5	18.0	10.7	115.0	111.2	-3.8 *
08	10.9	3.5	1.0	19.5	120.0	119.6	-0.4
09	6.0	0.0	2.0	10.6	130.0	130.6	0.6
10	0.0	8.0	2.0	13.7	135.0	136.1	1.1
11	9.0	20.0	2.0	15.2	130.0	134.7	4.7 *
12	20.0	9.5	3.0	3.8	110.0	107.2	-2.8 *
13	16.7	16.0	3.0	9.3	125.0	124.7	-0.3
14	15.3	12.8	3.0	11.8	135.0	133.1	-1.9
15	13.5	8.9	3.0	15.2	135.0	137.2	2.2
16	16.0	7.0	3.0	16.3	130.0	134.2	4.2 *
17	17.7	8.4	3.0	19.4	125.0	125.8	0.8
18	19.2	9.2	4.0	0.3	100.0	99.2	-0.8
19	19.0	12.0	4.0	12.4	135.0	134.6	-0.4
20	14.9	7.9	4.0	15.0	140.0	140.8	0.8
21	18.0	2.0	4.0	20.0	125.0	127.4	2.4
22	6.0	4.3	5.0	7.4	115.0	115.0	-0.0
23	11.0	12.5	5.0	11.9	130.0	131.5	1.5
24	10.0	19.0	12.5	10.0	105.0	104.4	-0.6
25	1.5	11.5	5.0	14.1	140.0	141.0	1.0
26	1.6	18.3	5.0	16.0	140.0	139.3	-0.7
27	4.5	16.7	6.0	10.0	120.0	122.0	2.0
28	4.0	14.0	6.0	13.8	135.0	137.0	2.0
29	13.2	19.0	6.0	17.8	135.0	132.8	-2.2
30	3.0	11.0	6.0	18.7	130.0	131.1	1.1
31	0.0	6.0	12.5	11.9	110.0	108.7	-1.3
32	8.0	7.7	7.0	0.8	95.0	94.9	-0.1
33	8.4	0.0	7.0	6.9	110.0	109.6	-0.4
34	10.2	2.0	7.0	9.1	115.0	116.5	1.5
35	14.2	0.0	19.0	3.0	120.0	119.1	-0.9
36	15.0	4.8	7.0	11.6	125.0	125.4	0.4
37	14.0	6.5	9.0	0.8	95.0	95.0	0.0
38	10.7	6.0	9.0	2.4	95.0	95.2	0.2
39	11.5	9.0	9.0	4.5	100.0	98.8	-1.2
40			9.0	12.5	120.0	121.7	1.7
41			12.5	13.8	115.0	113.1	-1.9
42			10.0	3.0	95.0	95.1	0.1
43			10.0	7.7	105.0	105.1	0.1
44			10.0	13.5	120.0	120.7	0.7
45			12.5	16.0	120.0	118.4	-1.6
46			10.0	18.0	130.0	128.5	-1.5
47			19.0	6.9	115.0	110.8	-4.2 *
48			12.0	7.4	100.0	101.0	1.0
49			12.0	9.5	105.0	104.6	-0.4
50			12.0	11.4	110.0	109.0	-1.0
51			12.0	13.4	115.0	113.7	-1.3
52			12.0	15.5	120.0	118.6	-1.4
53			12.0	17.0	125.0	122.2	-2.8 *
54			13.0	0.0	105.0	105.9	0.9
55			13.0	3.9	100.0	100.0	0.0
56			13.0	8.5	100.0	100.8	0.8
57			13.0	10.6	105.0	104.7	-0.3
58			13.0	16.6	120.0	118.5	-1.5
59			14.0	3.3	105.0	103.5	-1.5
60			14.0	5.0	100.0	101.7	1.7
61			14.0	11.7	105.0	105.3	0.3
62			14.0	15.3	115.0	112.6	-2.4
63			14.5	6.4	100.0	100.9	0.9
64			15.0	2.8	110.0	107.4	-2.6 *
65			15.0	5.8	100.0	102.3	2.3
66			15.0	6.6	100.0	101.4	1.4
67			15.0	10.8	105.0	104.0	-1.0
68			15.0	12.7	105.0	105.2	0.2
69			15.0	14.4	110.0	106.9	-1.1
70			15.0	16.3	115.0	112.8	-2.2
71			15.0	19.0	120.0	119.3	-0.7
72			17.0	3.3	115.0	112.8	-2.2
73			12.5	17.7	125.0	122.8	-2.2
74			17.0	7.1	105.0	103.3	-1.7
75			17.0	8.2	105.0	103.6	-1.4
76			17.0	9.0	110.0	104.7	-5.3 *
77			17.0	18.5	115.0	114.6	-0.4
78			20.0	3.5	120.0	120.7	0.7
79			20.0	8.0	115.0	114.7	-0.3
80			20.0	12.2	120.0	121.8	1.8

* Desvio superior a $\pm 2.5m$: 09 pontos

Discrepância média: 1.8m

sensivelmente. Dos oitenta pontos da amostra, apenas vinte, 25%, sofreram um desvio superior a $|2,5|$ e inferior a $|5,3|$, fornecendo-nos uma discrepância média de 2,26m. Notamos que o desvio máximo (5,3) diminuiu em relação ao experimento anterior e, conseqüentemente, a discrepância média também. Veja quadro nº 2.

Como o desvio máximo foi maior que uma eqüidistância (5m), devemos melhorar a densificação dos pontos.

Ao verificarmos onde encontram-se os pontos de maiores desvios, somos induzidos a pensar que estas regiões necessitam ser melhor densificadas, o que significa dizer que um maior número de pontos fundamentais devem ser tomados.

Escolhendo, desta maneira, mais treze pontos fundamentais, totalizando agora 39 pontos. Como era de se esperar, os resultados melhoraram ainda mais.

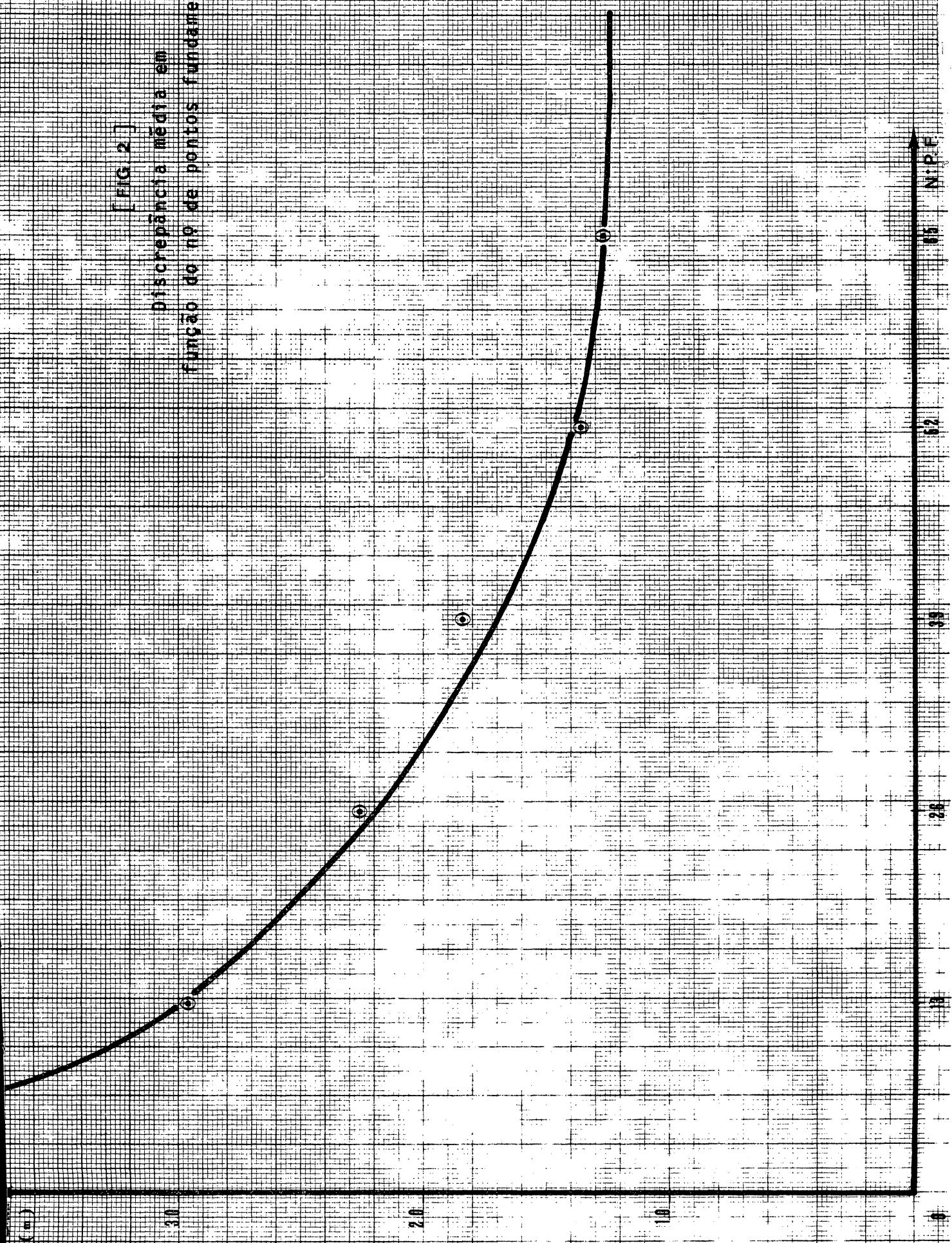
Apenas nove pontos, 11,25% sofreram um desvio superior a $|2,5|$ e inferior a $|5,3|$ sendo apenas dois maiores que uma eqüidistância, e assim mesmo não superior a 0,3m da mesma. E uma discrepância média 1,84m como nos mostra o quadro 3.

Notamos, assim, que quanto maior a densificação de pontos, melhores valores de z obtemos. Porém, verificamos que a partir de um certo número de pontos fundamentais a precisão obtida tende ser a mesma, o que significa ser inútil aumentarmos a densidade de pontos.

O gráfico da fig. 2 nos mostra a tendência da discrepância média em se estabilizar a partir de 65 pontos fundamentais. Tal curva nos informa qual o número de pontos a serem tomados para uma dada discrepância média. Dependendo da eqüidistância entre as curvas de nível, podemos estabelecer a discrepância média e por conseguinte o número de pontos a serem escolhidos.

[FIG. 2]

Discrepância média em
função do nº de pontos fundamentais



Um critério que poderia ser estabelecido para a escolha do número de pontos seria aquele no qual 80% dos pontos de uma amostragem deveriam possuir um desvio não superior a meia eqüidistância e os restantes não superior a uma eqüidistância. Obviamente, o usuário do método aqui descrito poderia, na dependência do rigor de seus objetivos, aumentar a porcentagem dos pontos da amostragem que devam possuir um desvio não superior a meia eqüidistância.

Para obtermos a curva da fig. 2 calculamos inicialmente as discrepâncias médias da amostragem quando o número de pontos fundamentais foram 13, 26 e 39, respectivamente. Com os três valores das discrepâncias médias obtidas, traçamos tendência da curva e verificamos que a mesma começava a se estabilizar nas proximidades da abcissa 60. Introduzimos mais 13 e 26 pontos fundamentais, totalizando respectivamente 52 e 65 pontos; calculamos as discrepâncias médias da mesma amostragem anterior e verificamos, como prevíamos, que a estabilização dos erros iniciava nas proximidades da abcissa 65.

5. ALTITUDES MÉDIAS

5.1 Obtenção das altitudes médias

Como dissemos anteriormente, estamos interessados na obtenção da altitude média de uma região, ou das altitudes médias de pequenas áreas que componham a região.

Uma vez de posse da equação da topografia de uma região ou das equações da topografia das áreas que componham a região podemos facilmente calcular a altitude média da área.

Seja uma área delimitada pelo quadrilátero ABCD, conforme mostra a fig. 3. Decompomos este quadrilátero em tantos outros quantos desejarmos.

Chamando de A_1 um destes pequenos quadriláteros, a altitude média do mesmo será dada pela média aritmética dos valores de z (altitude de um ponto) calculados com a equação da topografia da área ABCD. Os valores de z são obtidos incrementando, de um pequeno valor, as coordenadas x e y dos pontos interiores da área A_1 . Tal incremento dependerá da extensão da área em estudo e da rigorosi-dade da precisão do trabalho.

Poderíamos, também, facilmente calcular a altitude média de um compartimento das zonas de Hayford, uma vez conhecidos os raios e o ângulo central que os delimitam. Porém se assim o fizermos, teremos o inconveniente de sempre que mudarmos de estação, retirar do mapa as novas coordenadas de uma parcela dos pontos interiores a este compartimento e outra vez calcular a altitude média do novo compartimento que eventualmente possa ter a quase totalidade dos pontos que anteriormente pertenciam ao compartimento de altitude média já calculada.

O problema encontrado com o cálculo das altitude médias dos compartimentos de Hayford pode ser resolvido calculando-se as altitudes médias de quadrículas tomadas sobre o mapa de uma determinada região. Essas altitudes são transferidas sob e um gabarito transparente constituído de zonas e compartimentos. Através das altitudes médias das quadrículas que compõem o compartimento de Hayford obtemos a altitude média do referido compartimento. Ao mudarmos de estação, as altitudes médias das quadrículas continuam sendo as mesmas, variando apenas as quadrículas que constituirão o novo compartimento. Desta maneira, evitamos o laborioso trabalho de tirar novas coordenadas do mapa.

5.2 Processo prático de obtenção das altitudes médias

Sugerimos, aqui, um processo prático de se conseguir as altitudes médias das quadrículas que nos possibilita a obtenção das altitudes médias dos compartimentos de Hayford.

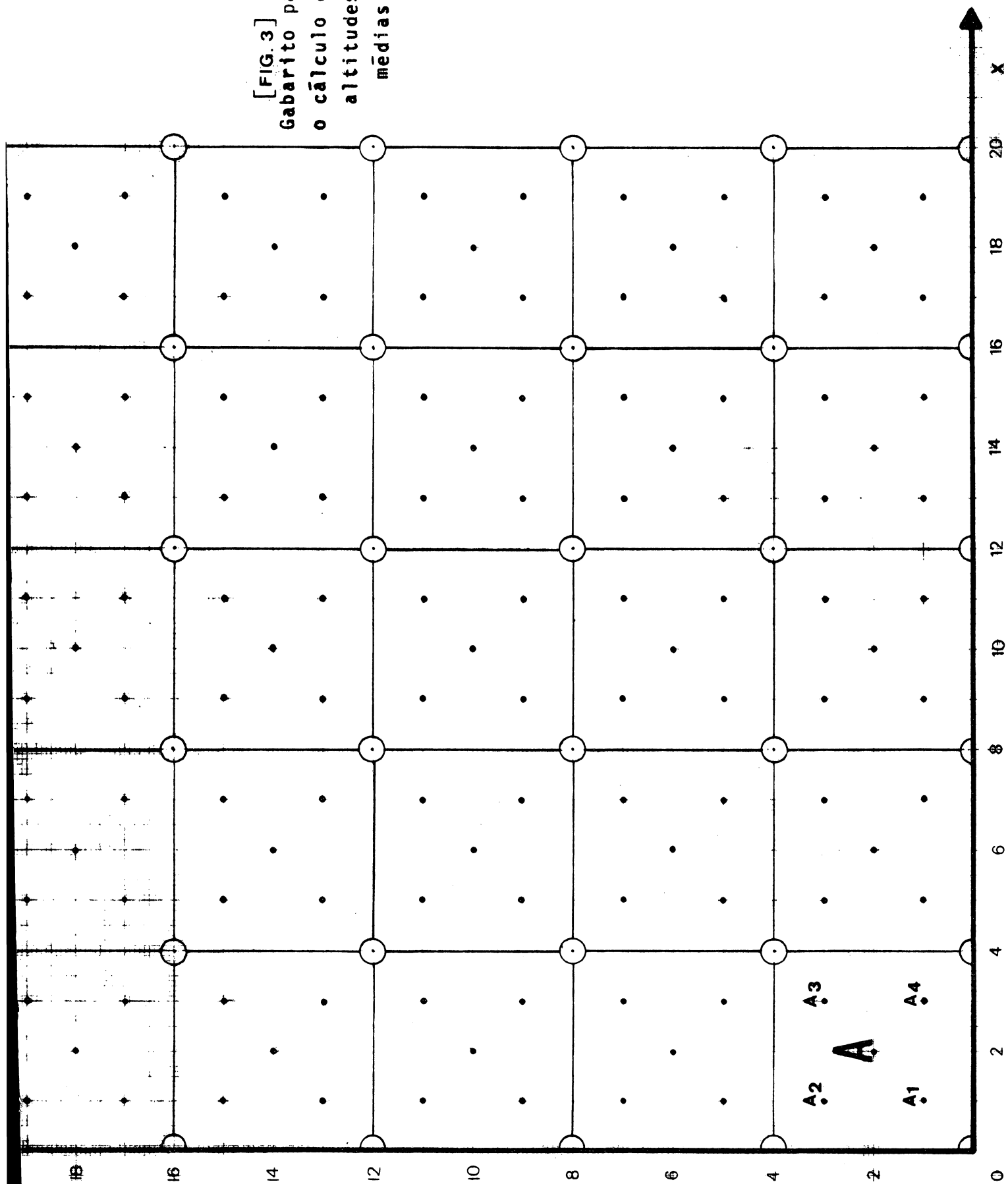
Tomamos um gabarito transparente quadriculado, como mostra a fig. 3, contendo 25 quadrados de 4x4cm. Para um mapa na escala de 1/50.000, cada quadrado, como por exemplo A, é subdividido em outros quatro: A_1, A_2, A_3 e A_4 , cujas altitudes médias desejamos calcular.

Necessitamos conhecer a equação da topografia do quadrado A. Para isso, sobrepomos o gabarito sobre o mapa e tomamos nove pontos fundamentais, quatro nos vértices e cinco interiores como podemos ver na fig. 3. Determinamos a equação da topografia com estes pontos pelo processo visto anteriormente. Com a mesma, calculamos os valores de altitudes de 100 pontos interiores ao quadrado A, dando incrementos de 0,2cm tanto a x como a y. As altitudes médias de A_1, A_2, A_3 e A_4 são dadas pela média aritmética de seus respectivos pontos interiores que são em número de 25 cada um.

Queremos chamar a atenção do leitor que na tomada dos nove pontos fundamentais procuramos sempre escolher aqueles que se localizem sobre uma cota cheia e o mais próximo possível dos pontos indicados no gabarito. Devido ao fato da área A ser pequena isto é sempre possível. Salientamos ainda que não nos preocupamos rigorosamente em escolher pontos fundamentais que melhor representassem o relevo, porém isso se justifica não só pelo fato da área ser pequena, como também por estarmos interessados na altitude média de A_1, A_2, A_3 e A_4 e não em pontos isolados.

Procedemos da mesma maneira para os demais quadrados,

[FIG. 3]
 Gabarito para
 o cálculo das
 altitudes
 médias



iguais a \underline{A} , obtendo as altitudes médias das quadrículas.

Como aplicação, calculamos as altitudes médias de vinte e cinco quadrículas de um mapa do município de Guaiapira, na escala de 1:50.000 cujas curvas de nível eqüidistam entre si 20m, e as comparamos com as altitudes médias obtidas por processo manual. Os resultados, como podemos verificar no quadro 4, mostram-se satisfatórios para os nossos objetivos.

Ressaltamos que uma investigação mais minuciosa sobre o processo prático, poderá nos conduzir a melhores resultados; o que esperamos, num próximo estágio, sistematizar tal investigação.

6. CÁLCULO DA CORREÇÃO DO TERRENO

Vimos que a dificuldade no cálculo da correção do terreno reside na obtenção das altitudes médias dos compartimentos das zonas de Hayford.

Uma vez determinadas tais altitudes médias, procedemos o cálculo da correção do terreno através da (6.2.10) do capítulo I, ou seja:

$$C = 2\pi G\rho \left[(R_1^2 + \bar{h}^2)^{1/2} - (R_2 + \bar{h}^2)^{1/2} + R_2 - R_1 \right]$$

Quadro 4 - Comparação das altitudes médias das quadrículas de 2 x 2 cm calculadas pelos processos manual e computacional de uma área do Município de Guaipira - S.P. Mapa na escala de 1:50.000 com curvas de nível equidistanciadas de 20m.

Quadrículas	Processo manual (m)	Processo computacional (m)	Diferença (m)
A ₁	890	874	16
A ₂	880	880	0
A ₃	870	880	10
A ₄	880	891	11
B ₁	820	831	11
B ₂	840	844	4
B ₃	830	816	14
B ₄	800	803	3
C ₁	820	819	1
C ₂	800	820	20
C ₃	830	830	0
C ₄	800	808	8
D ₁	880	894	14
D ₂	880	892	12
D ₃	910	888	22
D ₄	860	875	15
E ₁	830	825	5
E ₂	820	832	12
E ₃	830	821	9
E ₄	810	826	16

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

Tendo em vista os resultados obtidos neste trabalho, on adotamos a equação representativa de uma região da superfície fí-sica da Terra, podemos concluir o que se segue.

O primeiro passo decisivo para atingirmos o nosso obje-tivo é aquele no qual procedemos a escolha dos pontos fundamen-tais, que definam a altimetria da área em estudo. A escolha dos mesmos é de capital importância para a representação efetiva do relevo e para a precisão de que necessitamos no cálculo da altitu-des. O bom senso, a habilidade e a precisão do operador nesta es-colha são fundamentais.

Escolhidos os pontos fundamentais, deparamos com a den-sificação dos mesmos, isto é, o número de pontos tomados é sufi-ciente para a precisão desejada? A curva do tipo da fig. 2 nos in-dica o número de pontos a serem escolhidos para uma determinada discrepância média. O critério adotado neste trabalho onde consi-deramos que numa amostragem 30% dos pontos devam possuir um des-vio menor ou igual a meia eqüidistância é passível de alteração dependendo do objetivo do usuário do método.

Definida a densificação, através da equação da topogra-fia, obtemos as altitudes médias dos compartimentos e com as mes-mas calculamos a correção do terreno.

Concluimos assim, que dentro de certos limites, isto é, quando estivermos interessados em obter altitudes médias o método aqui descrito encontra aplicabilidade no campo da Geodésia Física, não só na correção do terreno como também no cálculo das correções isostática, topo-isotática e, ainda, em outras interpolações de su perfícies em geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |01| GEMAEL, Camil. Geodésia física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. p. 3.1.

- |02| HARDY, Rolland L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research, Richmond, 76(8):1905-15, Mar., 1971.

- |03| HEISKANEN, Weiko A & MORITZ, Helmut. Physical geodesy. San Francisco, W.H. Freeman, 1967. 364 p.

- |04| HEISKANEN, Weiko A & MEINESZ, F.A. Vening. The earth and its gravity field. New York, McGraw-Hill, 1958. 470 p.

- |05| KELLOGG, Oliver Dimon. Foundations of potential theory. New York, Dover, 1953. p. 3-22.

- |06| MACMILLAN, William Duncan. Theory of potential. New York, Dover, 1958. p. 2.

- |07| PASTOR, Julio Rey et al. Geometría analítica. Buenos Aires, Kapelusz, 1955. 535 p.

APĚNDICE

```

----- COMPARACAO DA ALTITUDE CALCULADA COM A OBTIDA DO MAPA
DIMENSION A(65),B(65),C(65,65),D(65),E(65),DE(65,65),X(80),Y(80)
1,Z(80),ZC(80),DZ(80)

C----- LEITURA DO NUMERO DE PONTOS FUNDAMENTAIS, NUMERO DE
PONTOS DA AMOSTRAGEM E SUAS COORDENADAS.

READ(2,9) N,M
FORMAT(2I)
READ(2,10)(A(I),I=1,N)
READ(2,10)(B(I),I=1,N)
READ(2,10)(E(I),I=1,N)
READ(2,10)(X(I),I=1,M)
READ(2,10)(Y(I),I=1,M)
READ(2,10)(Z(I),I=1,M)
10 FORMAT(13G)

J----- CALCULO DOS COEFICIENTES DAS MULTIQUADRICAS

DO 50 I=1,N
DO 50 J=1,N
C(I,J)=SQRT((A(J)-A(I))**2+(B(J)-B(I))**2)
50 DE(I,J)=C(I,J)
WRITE(5,500)
WRITE(5,510)(E(I),I=1,N)

C--- CALCULO DAS RAIZES DO SISTEMA

CALL ARRAY(2,N,N,N,N,C,C)
CALL SIMQ(C,E,N,KS)
IF(KS)600,600,601
600 WRITE(5,520)
WRITE(5,510)(E(I),I=1,N)

C----- VERIFICACAO DO SISTEMA

DO 60 J=1,N
D(J)=0.
DO 60 I=1,N
60 D(J)=DE(J,I)*E(I)+D(J)
WRITE(5,530)
WRITE(5,510)(D(I),I=1,N)
WRITE(5,700)
700 FORMAT(1H1,/,6X,'XF',11X,'YF',14X,'C',17X,'X',9X,'Y',9X,'Z',15
1X,'ZC',13X,'DZ',/)

C----- CALCULO DA ALTITUDE

DO 110 I=1,M
ZC(I)=0.
DO 110 J=1,N
ZC(I)=ZC(I)+E(J)*SQRT((A(J)-X(I))**2+(B(J)-Y(I))**2)
DZ(I)=ZC(I)-Z(I)
110 CONTINUE
DO 120 I=1,M
IF(N-I)701,702,702
702 WRITE(5,703)A(I),B(I),E(I),X(I),Y(I),Z(I),ZC(I),DZ(I)
703 FORMAT(4X,F5.1,8X,F5.1,7X,F14.7,7X,F5.1,5X,F5.1,5X,F5.1,15X,F5
1.1,4XF5.1)
GO TO 120
701 WRITE(5,704)X(I),Y(I),Z(I),ZC(I),DZ(I)
704 FORMAT(50X,F5.1,5XF5.1,5XF5.1,15XF5.1,4XF5.1)
120 CONTINUE
GO TO 602

C--- MENSAGEM DE MATRIZ SINGULAR

601 WRITE(5,540)
602 CALL EXIT
510 FORMAT(' ',5F15.7)
500 FORMAT(/27X,16H VETOR CONSTANTE,/)
520 FORMAT(/27X,18H RAIZES DO SISTEMA,/)
540 FORMAT(/27X,28H MATRIZ INVERSA NAO DEFINIDA)
530 FORMAT(/27X,23H VERIFICACAO DO SISTEMA,/)
STOP
END

```

PROGRAMA 2

```

DIMENSION A(9),B(9), C(9,9),E(9),CE(9,9),X(20)
1,Y(20,Z1(20,20).

C ----- LEITURA DE: NUMERO DE PONTOS FUNDAMENTAIS, SUAS COORDENADAS,
COORDENADAS DOS PONTOS INTERIORES AO QUADRADO 'A'.

      READ(2,9) N,M
9      FORMAT(2I)
      READ(2,20)(A(I),I=1,N)
      READ(2,20)(A(I),I=1,N)
      READ(2,20)(E(I),I=1,N)
      READ(2,10)(X(I),I=1,M)
      READ(2,10)(Y(I),I=1,M)
10     FORMAT(13G)
20     FORMAT(9G)

C ----- CALCULO DOS COEFICIENTES DAS MULTIQUADRICAS

      DO 50 I=1,N
      DO 50 J=1,N
      C(I,J)=SQRT((A(J)-A(I))**2+(B(J)-B(I))**2)
50     CE(I,J)=C(I,J)
      WRITE(5,500)
      WRITE(5,510)(E(I),I=1,N)

C ----- CALCULO DAS RAIZES DO SISTEMA

      CALL ARRAY(2,N,N,N,N,C,C)
      CALL SIMQ(C,E,N,KS)
      IF(KS)600,600,601
600    WRITE(5,520)
      WRITE(5,510)(E(I),I=1,N)

C ----- VERIFICAÇÃO DO SISTEMA

      DO 60 J=1,N
      D(J)=0,
      DO 60 I=1,N
      D(J)=CE(J,I)*E(I)+D(J)
60     WRITE(5,530)
      WRITE(5,510)(D(I),I=1,N)
      WRITE(5,700)
700    FORMAT(1H1,/,6X,'XF',11X,'YF',14X,'C',17X,'X',9X,'Y',/)

C ----- CALCULO DAS ALTITUDES

      DO 211 K=1,20
      DO 211 K1=1,20
      ZI(K,I),K)=0.0
      DO 211 L=1,N
211    ZI(K1,K)=ZI(K1,K)+E(L)*SQRT((A(L)-X(K))**2+(B(L)-Y(K1))**2)

C ----- CALCULO DAS ALTITUDES MEDIAS DAS QUADRICULAS

      SOMA1=0
      SOMA2=0
      SOMA3=0
      SOMA4=0

      DO 215 I=1,5
      DO 215 J=1,5
      SOMA1=SOMA1+ZI(I,J)/25
      SOMA2=SOMA2+ZI(I,J+5)/25
      SOMA3=SOMA3+ZI(I+5,J)/25
      SOMA4=SOMA4+ZI(I+5,J+5)/25
215    CONTINUE
      DO 222 I=1,20
      IF(N-I)223,224,224
224    WRITE(5,225)A(I),B(I),E(I),X(I),Y(I)
225    FORMAT(4X,F5.1,8X,F5.1,7X,F14.7,7X,F5.1,7X,F5.1)
      GO TO 222
223    WRITE(5,226)X(I),Y(I)
226    FORMAT(50X,F5.1,5X,F5.1)
222    CONTINUE
      WRITE(5,1000)
      DO 2000 K=1,20
2000   WRITE(5,100)(ZI(K1,K),K1=1,N)
      WRITE(5,1002)
      WRITE(5,1002) SOMA1,SOMA2,SOMA3,SOMA4
1000   FORMAT(30X,ALTITUDESZ1 DAS QUADRICULAS'//)
1001   FORMAT(25X,10F7.1,/,25X,10F7.1,/)
1002   FORMAT(30X,ALTITUDES MEDIAS ZM DAS QUADRICULAS'//)
1003   FORMAT(15X,4F15.1//)
      DO TO 602

C ----- MENSAGEM DE MATRIZ SINGULAR

601    WRITE(5,540)
602    CALL EXIT
510    FORMAT('',5F15.7)
530    FORMAT(/27X,16H VETOR CONSTANTE,/)
520    FORMAT(/27X,18H RAIZES DO SISTEMA,/)
540    FORMAT(/27X'28H MATRIZ INVERSA NAO DEFINIDA)
530    FORMAT(/27X,23H VERIFICACAO DO SISTEMA,/)
      STOP
      END

```